高效相干源 DOA 估计的 ESPRIT 新方法 *

蔡会甫，黄登山
（西北工业大学 电子信息学院，西安 710129）

摘　要：ESPRIT 算法是一种速度快、精度高的常用算法，但它不能解相干。针对此缺陷，提出了一种新的高效相干源 DOA 估计的改进 ESPRTIT 方法，新方法对数据协方差矩阵的最大特征值对应的特征向量按一定方式进行重排处理，以此来重构需要解相干矩阵。它不仅解决了常规 ESPRIT 算法不能解相干的问题，同时相对常规 ESPRIT 算法计算过程大大简化。计算机仿真实验证明了该方法在解相干方面的良好性能，为解相干的 ESPRIT 算法在阵列信号处理的超高分辨领域开辟了新的途径。

关键词：阵列信号处理；数据协方差矩阵；DOA 估计；ESPRIT 算法
中图分类号：TN911.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001-3695(2010)01-0314-03
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.01.093

New high efficiency ESPRIT method on DOA estimate of coherent sources

CAI Hui-fu, HUANG Deng-shan
(*College of Electron & Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710129, *China*)

Abstract: ESPRIT algorithm is a common algorithm of high speed and high precision, but it didn't estimate coherent signal. Aiming at the bug, this paper proposed a new improved ESPRIT algorithm of DOA(direction of arrival) estimate of high efficiency and coherent source. Eigenvector corresponding to the maximum eigenvalue of the data correlation matrix could be arranged via method which was raised. It solved the following problem of routine ESPRIT algorithm: not estimating coherent signal. Meanwhile, compared with routine ESPRIT algorithm, it greatly simplified computable course. Computer simulator realization makes sure that it is DOA estimate algorithm of high efficiency, resolution and precision in estimating coherent signals, it provides new approach which ESPRIT algorithm of estimating coherent source has application on high resolving field of array signal.

Key words: array signals processing; data correlation matrix; DOA estimate; ESPRIT algorithm

阵列信号处理作为信号处理的一个重要分支领域，在目前阵列信号估计(DOA)算法中，MUSIC 和 ESPRIT 算法在理想条件下都具有良好的性能[1,2]，但在信号源相干时算法的性能变得很坏，甚至无法进行目标方位估计。而实际环境中，由于多径现象，相干信号是普遍存在的，为此探索一种相干环境下适用信号目标方位估计的算法很重要。MUSIC 算法需要进行空间谱峰搜索，运算量大，不适用于雷达对运动目标的实时跟踪[3]。在运动目标定位中需要知道目标角度的数值解，因此采用运算量小的 ESPRIT 算法，但常规 ESPRIT 算法不能处理相干信号[4]。

本文提出一种基于 Toeplitz 矩阵[3] 重构的高效相干源 DOA 估计的 ESPRIT 新算法(high efficiency and toeplitz matrix - ESPRIT, HET-ESPRIT)，它不仅解决了常规 ESPRIT 算法固有的缺陷，而且由于采用新的处理方法，相对常规 ESPRIT 算法大大简化了计算过程；同时不需要像解相干 MUSIC 算法那样进行空间谱峰搜索，易于对相干信号源进行实时跟踪，这对雷达实时截获目标信号有重要的现实意义。

1　常规 LS-ESPRIT 算法模型[2]

假设阵元数为 M 的等间距均匀线列阵(ULA)接收来自远方的 N 个窄带信号，中心频率为 f_0，快拍数为 K，来波方向为 $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N)$。噪声假定为高斯白噪声，常规 LS-ESPRIT 算法的基本原理[3]是在阵列中取两个完全相同的子阵，两个子阵的间距为 Δ，由于两个子阵的结构完全相同，设每个子阵的阵元数为 m，对于同样的信号而言，两个子阵的输出只相差一个相位差 $\Phi_i(i=1,2,\cdots,N)$。假设第一个子阵的接收数据为 X，第二个子阵的接收数据为 Y，根据阵列的数学模型可知两个子阵的接收信号为

$$X=[a(\theta_1),\cdots,a(\theta_N)]S+N_1=AS+N_1 \tag{1}$$

$$Y=[a(\theta_1)e^{j\Phi_1},\cdots,a(\theta_N)e^{j\Phi_N}]S+N_2=A\Phi S+N_2 \tag{2}$$

其中：Φ 为旋转因子，表示为 $\Phi=\mathrm{diag}[e^{j\Phi_1},\cdots,e^{j\Phi_N}]$；$A=[a(\theta_1),\cdots,a(\theta_N)]$ 为导向矢量；S 为信号矢量；$\Phi_i=(2\pi|\Delta|\sin\theta_i)/\lambda$；$N_1,N_2$ 为噪声矢量。

从式(1)和(2)可知，需要求解的信号方向包含在导向矢量 A 和旋转因子 Φ 中，只要得到两个子阵之间的旋转不变关系，通过特征值分解，就可以得到信号到达角的信息。

为了得到两个子阵之间的关系，现将两个子阵模型合并形成矩阵 Z，即

$$Z=\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\A\Phi\end{bmatrix}S+\begin{bmatrix}N_1\\N_2\end{bmatrix}=\bar{A}S+N \tag{3}$$

收稿日期：2009-04-20；**修回日期**：2009-06-02　　**基金项目**：西北工业大学自然科学基金资助项目(W018103)
作者简介：蔡会甫(1984-)，男，硕士研究生，主要研究方向为通信系统、雷达信号处理等(hbsy20039029@163.com)；黄登山(1962-)，男，教授，硕导，中国电子学会高级会员，主要研究方向为通信系统、信息处理、空间谱估计等.

在无噪声条件下,求出 Z 的数据协方差矩阵 R_Z

$$R_Z = [ZZ^{\mathrm{H}}] = \overline{A}S\overline{A}^{\mathrm{H}} + \sigma_v^2 I \tag{4}$$

这里 $\overline{A} = [A \quad A\Phi]^{\mathrm{T}}$,$[\cdot]^{\mathrm{T}}$ 表示转置。

对 R_Z 进行特征分解[5],可以得到 N 个大特征值对应信号子空间 $U_s = [e_1, e_2, \cdots, e_N]$ 和 $M-N$ 小特征值对应噪声子空间 $U_N = [e_{N+1}, \cdots, e_M]$。这就意味着存在惟一的、非奇异的 $N \times N$ 维满秩矩阵 T,使得

$$U_S = \overline{A}T = \begin{bmatrix} U_{SX} \\ U_{SY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A\Phi T \end{bmatrix} \tag{5}$$

即由子阵 X 的大特征矢量张成的子空间 U_{SX} 和子阵 Y 的大特征矢量张成的子空间 U_{SY} 与阵列流型 A 张成的子空间三者相等。根据式(5),两个子阵的信号子空间之间有如下关系

$$U_{SY} = U_{SX}T^{-1}\Phi T = U_{SX}F \tag{6}$$

当 U_{SX} 满秩时,式(6)的解是惟一的,可得式(6)的最小二乘解[6]

$$F = (U_{SX}^{\mathrm{H}} U_{SX})^{-1} U_{SX}^{\mathrm{H}} U_{SY} \tag{7}$$

对式(7)进行特征分解,可得

$$F = T\Phi T^{-1} \tag{8}$$

可以看出,矩阵 F 与 Φ 为相似矩阵,因而它们具有相同的特征值,且其特征值为矩阵 Φ 的对角元素,将 Φ 代入式 $\Phi_i = (2\pi|\Delta|\sin\theta_i)/\lambda$,从中解得信号的入射角度 θ_i:

$$\theta_i = \arcsin[\lambda \arg(\varphi_i)/(2\pi\Delta)], i = 1, \cdots, N \tag{9}$$

当 U_{SX} 不满秩时,式(6)的解不惟一。这就是常规 LS-ESPRIT 不能解相干的原因[7],因此需要进行解相干处理。

2　一种新的高效解相干的 ESPRIT 算法

本方法对含有相同阵元两个子阵 X 和 Y 形成的偶阵元采用新的处理方法来重构矩阵 F,使改进的 ESPRIT 算法具有高效高分辨估计相干信号的能力。新方法首先在这里仅仅取子阵 X,求出接收数据 X 的协方差矩阵,并进行特征值分解,得到最大特征值对应的特征矢量;其次对最大特征矢量的各个元素与参考元素(特征矢量的第一个元素)的相关函数进行重排,形成一个新的共轭对称矩阵;最后对新矩阵进行特征值分解得到信号子空间,并对信号子空间采用空间平滑处理,得到两个含有信号信息的矩阵,以此来重构需要的 F 矩阵,再从其特征值中解得信号的到达角。由于最大限度地利用其数据协方差信息,具有很高的分辨相干信号的能力和估计精度。下面的仿真实验证实了此方法的优越性和可行性。

根据文献[8]得到偶阵元中的 X 阵列接收数据的协方差矩阵 R_{XX},并对它进行特征分解 $[U, S] = \mathrm{eig}(R_{XX})$,本文取出其中最大特征值 λ_1 对应的特征矢量 e_1。

$$e_1 = [e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1M}]^{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_1 a(\theta_k) \tag{10}$$

其中:M 为阵元数;N 为信号源数;θ_k 为第 k 个信号的方位角;$a(\theta_k)$ 为第 k 个信号的导向矢量[3]。

取 e_{11} 作为参考元素,对 $e_{11}, e_{12}, e_{13}, \cdots, e_{1M}$ 分别与参考元素 e_{11} 取相关函数,具体实现如下

$$r(k-1) = E[e_{11}e_{1k}^{\mathrm{H}}], k = 1, 2, \cdots, M \tag{11}$$

当 $r(k-1)$ 的 k 由变到 M 时,得到的相关矢量为 $[r(0), r(1), r(2), \cdots, r(M-1)]$,且满足

$$[r(0), r(1), r(2), \cdots, r(M-1)] = [E[e_{11}e_{11}^{\mathrm{H}}], E[e_{11}e_{12}^{\mathrm{H}}], \cdots, E[e_{11}e_{1M}^{\mathrm{H}}]] \tag{12}$$

对应于 $r(0), r(1), r(2), \cdots, r(M-1)$,其共轭向量

$$r(-k+1) = E[e_{1k}e_{11}^{\mathrm{H}}], k = 1, 2, \cdots, M \tag{13}$$

通过推理证明可以得到

$$r(-k+1) = r^*(k-1), k = 1, 2, \cdots, M \tag{14}$$

可以看出,由相关函数构成的相关矢量包含了所有的入射信号方向信息。由式(12)和(13)的相关矢量重构的矩阵 Z 如下所示:

$$Z = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ \text{ú} & \text{ú} & & \text{ú} \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}_{M \times M} \tag{15}$$

通过证明,Z 是 $M \times M$ 阶的 Hermitian Toeplitz 矩阵(共轭对称矩阵)。接下来首先对新构矩阵 Z 进行特征值分解 $[U, V] = \mathrm{eig}(Z)$,其次找出信号子空间 $U_S = U(:, 1:N)$。

为了简化重构矩阵 F 的过程,本文在这里采用不同于 LS-ESPRIT算法的新重构方法,对信号子空间采用空间平滑的原理,取子阵数为 2,阵元数为 7,即 $U_{S1} = U_S(1:M-1, :)$ 和 $U_{S2} = U_S(2:M, :)$,且 U_{S1} 和 U_{S2} 满足式(6)的关系。

如果 U_{S1} 满秩,根据推导证明,F 和 Φ 仍满足

$$F = T^{-1}\Phi T \tag{16}$$

Φ 为信源入射角度的函数,由式(16)得矩阵 F 与 Φ 为相似矩阵,具有相同的特征值,因此 F 含有所有信号的到达角信息。取 U_{S1} 的右伪逆矩阵 $U_{S1}^{\#}$,由式(6)重构矩阵 F 为

$$F = U_{S1}^{\#} \times U_{S2} \tag{17}$$

其中:$(\cdot)^{\#}$ 表示伪逆。

对 F 进行特征值分解,由于 F 中含有所有信号源的方位信息,由式(9)可以得到信号到达角的估计值。

根据以上算法实现,基于 Toeplitz 矩阵重构的 HET-ESPRIT 算法估计信号到达角步骤总结如下:

a)从接受阵元取 X 阵元,并得到其相关矩阵 R_{XX} 的估计值 $\hat{R}_{XX}$。

b)对 $\hat{R}_{XX}$ 作特征值分解,得最大特征值对应的特征向量 e_1。

c)利用相关函数 $r(k)$ 按式(15)重构矩阵 Z,并进行特征值分解,估计信源个数 N。

d)取 $\hat{R}_{ZZ}$ 的特征值中 N 个最大特征值构成的信号子空间,并对其进行空间平滑,将 U_S 分成 U_{S1} 和 U_{S2} 两部分,并按照式(17)重构矩阵 F。

e)根据式(17)计算 F 的特征值 $\hat{\Psi}_K (k = 1, 2, \cdots, N)$。

f)根据式(9)计算信号到达角的估计值。

由以上算法实现过程的剖析,与常规 ESPRIT 算法相比,改进算法具有以下两个创新点:

a) 高效解相干能力。本文采用基于 Toeplitz 矩阵重构的方法对接收数据矩阵 X 进行解相干处理,没有降低自由度,最大限度地利用阵列协方差矩阵的数据信息,是一种解相干能力相当好的改进 ESPRIT 算法。

b)计算效率大大提高。原来的 LS-ESPRIT 算法需要对两个相同的子阵 X 和 Y 接收数据进行合并处理;而改进的方法不需要对两个子阵都进行处理,只需要对一个子阵的接收数据进行处理即可,然后采用特殊手段来重构矩阵 F,计算量减少了一倍左右,计算效率有很大的提升。

3　仿真实验与性能分析

仿真条件:阵列的阵元数为 8,窄带远场相干信源为 2,快拍数为 512,阵元间距为 $d=\lambda/2$ 的均匀线阵,两个信号的来波方向分别为 10°、20°,噪声均为高斯白噪声,方差为 1。

实验结果 1　在不同信噪比条件下,HET-ESPRIT 与常规 LS-ESPRIT 算法分辨情况和偏差分析如表 1、2 所示。从表 1、2 中数据可以看出,本方法完全适用于相干信号的方位估计。首先 HET-ESPRIT 算法可以估计相干信号,而常规 LS-ESPRIT 算法只能估计非相干信号;其次,在保持较高估计精度前提下,同样的实验条件,本方法可以估计信噪比在 -5 dB 条件下的相干信号,而常规方法只能估计 5 dB 以上的非相干信号。因此,从实验结果来看,本方法是一种非常好的分辨相干信号的 ESPRIT 算法,具有很高的分辨能力和估计精度。这不仅具有 ESPRIT 相对 MUSIC 算法的固有优点,同时它的分辨能力和估计精度也是大多同类解相干 MUSIC 算法望尘莫及的。

表 1　HET-ESPRIT 算法估计相干信号与非相干信号

(X 表示不能估计)

信号类型	信噪比/dB	信号 1(10°)	信号 2(20°)	偏差 1(10°)	偏差 2(20°)
相干信号	10	10.043 4	20.053 6	0.043 4	0.053 6
	5	9.880 9	19.891 2	0.119 1	0.108 8
	0	10.205 0	20.208 7	0.205 0	0.208 7
	-5	9.585 9	19.578 8	0.414 1	0.421 2
非相干信号	X	X	X	X	X

表 2　LS-ESPRIT 算法估计相干信号与非相干信号

(X 表示不能估计)

信号类型	信噪比/dB	信号 1(10°)	信号 2(20°)	偏差 1(10°)	偏差 2(20°)
非相干信号	10	9.804 3	19.782 9	0.195 7	0.217 1
	5	10.478 3	20.443 1	0.478 3	0.443 1
	0	11. 395 2	20. 909 0	1.395 2	0.909 0
	-5	X	X	X	X
相干信号	X	X	X	X	X

实验结果 2　同实验 1 的条件,多相干信号来波方向为 10°、20°、50°、60°,通过对 HET-ESPRIT 进行仿真,得到如图 1 所示的结果。图 1 给出了在不同信噪比条件下 HET-ESPRIT 方法估计相干信号的 DOA 情况。实验表明在低信噪比下,HET-ESPRIT 算法具有很高的分辨能力和较好的估计精度,同时可分辨的相干信源数相对较多。

实验结果 3　在实验 2 的仿真条件下,四个窄带远场相干信号源的平均估计偏差随信噪比变化情况如图 2 所示。从图 2 中可以看出,在 0 dB 条件下的平均估计偏差为 0.303, -5 dB 条件下的平均估计偏差为 0.612,甚至在 -10 dB 下平均估计偏差仅仅为 1.110 左右,因此 HET-ESPRIT 算法在低信噪比条件下具有估计误差小、鲁棒性好的优点。

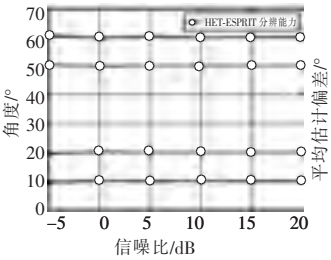

图 1　HET-ESPRIT 算法 DOA 估计结果

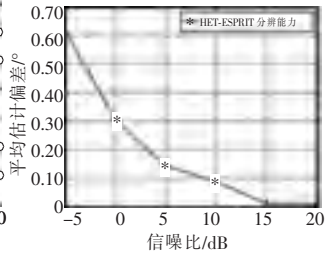

图 2　HET-ESPRIT 算法平均估计偏差

4　结束语

本文在常规 LS-ESPRIT 算法的基础上提出了基于 Toeplitz 矩阵[3]重构的高效相干源 DOA 估计的 ESPRIT 新算法。该算法不仅具有高分辨的解相干能力和 DOA 估计精度,而且采用独特的处理方法简化了常规 ESPRIT 算法的计算步骤,计算效率大大提高,对雷达实时跟踪空间目标有重要的现实意义,为 ESPRIT 算法在阵列信号处理的高效解相干领域的应用提供了新的途径。

参考文献:

[1] 蒋毅,古天祥. 一种基于数据矩阵的快速 ESPRIT 实现[J]. 计量技术,2007,7(1):3-4.

[2] 王永良. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京:清华大学出版社,2004.

[3] 王布红,陈辉. 一种估计相干信源 DOA 估计算法:加权空间平滑协方差矩阵的 Toeplitz 矩阵拟合[J]. 电子学报,2003,31(9):1394-1397.

[4] BAO Zhi-qiang,WU Shun-jun,ZHANG Lin-rang. Computationally efficient ESPRIT method for direction finding[J]. Journal of Electron (China),2007,24(5):655-661.

[5] WANG Yong-liang,CHEN Hui. An effective DOA method via virtual array transformation[J]. Science in China,2001,44(1):75-82.

[6] JIANG Hong,WANG Shuan. Fourth-order cyclic cumulant TLS-ESPRIT algorithm to estimate direction of cyclostionar coherent sources [C]//Proc of IEEE International Conference on Neural Network& Signal Processing. 2003:1330-1333.

[7] ROY R,KAILATH T. ESPRIT—estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Trans on ASSP,1989,37(7):948-955.

[8] LIU Qiong,ZHOU Hui-can,WANG Yao-nan. A new DOA estimate algorithm for coherent sources[J]. Micro-Computer Information,2007,23(7):290-292.

(上接第 291 页)

[5] 张晋豫,杨维,刘犁. 优化的 EPON 组播 QoS DBA 实现研究[J]. 通信学报, 2009,30(2):22-28.

[6] 张晋豫,刘犁. 基于效用的 EPON 分布式 DBA 实现机制[J]. 软件学报,2008,19(7):1693-1706.

[7] GUO Hai-bo,KUO Geng-sheng. Support of IP micro-mobility in GMPLS and EPON-based integrated network access architecture[C]// Proc of ICC 2005. Shanghai:IEEE Computer and Communications Societies, 2005:1863 - 1868.

[8] BROEK M X van den,ADAN I B J F,SAI S N,*et al*. A novel mechanism for contention resolution in HFC networks[C]//Proc of INFOCOM 2003. Phoenix:IEEE Computer and Communications Societies, 2003:979-989.

[9] LEE W T,CHUNG K C,CHU K C,*et al*. DOCSIS performance analysis under high traffic conditions in the HFC networks[J]. IEEE Trans on Broadcasting,2006,52(1):21-30.

[10] HONG S E,KWON O H,KIM S K. Performance analysis of single- and multi-channel contention resolution algorithm for the DOCSIS MAC protocol[C]//Proc of ICC2006. Istanbul:IEEE Computer and Communications Societies, 2006:1083-1088.

[11] LALLUKKA S,RAATIKAINEN P. Link utilization and comparison of EPON and GPON access network cost[C]//Proc of GLOBECOM 2005. St. Louis,Missouri:IEEE Computer and Communications Societies,2005.