

# 非正则复向量的扩展 MVDR 算法研究

贾 鹏<sup>1,4</sup>, 丛丰裕<sup>2,3</sup>, 周士弘<sup>3</sup>, 杜栓平<sup>3</sup>, 史习智<sup>2</sup>

(1. 国家移动卫星通信工程技术研究中心 210002; 2. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室 200240;  
3. 杭州应用声学研究所 310012; 4. 东南大学信息科学与工程学院 210096)

摘要: 研究了非正则复向量的特性对 MVDR 算法的影响。将阵元接收数据经过 FFT 运算后, 在任一频率下的列向量都是非正则复向量。根据非正则复向量伪自相关阵的特性, 提出了扩展自相关矩阵和扩展驱动向量, 推导出了扩展 MVDR(ExMVDR) 算法。仿真试验表明 ExMVDR 算法比 MVDR 能够更好的压制旁瓣, 主瓣的信噪比能够提高 2dB 左右。

关键词: 非正则; 复向量; MVDR; 扩展自相关矩阵

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2008)-01-0106-04

## Improper complex vector-oriented ExMVDR algorithm

JIA Peng<sup>1,4</sup>, CONG Feng-yu<sup>2,3</sup>, ZHOU Shi-hong<sup>3</sup>, DU Shuan-ping<sup>3</sup>, SHI Xi-zhi<sup>2</sup>

(1. NERC for Mobile Satellite Communication, Nanjing 210002, China; 2. State Key Lab of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

3. Hangzhou Applied Acoustics Research Institute, Hangzhou 310012, China;

4. School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: The influence of the characteristic of the improper complex vector on MVDR algorithm is studied. After FFT is performed on the received data from array, the column vector in each frequency bin is improper. According to the characteristic of the pseudo-autocorrelation matrix of the improper complex vector, the extended autocorrelation matrix and the extended steering vector are brought forward. Thereby, a new extended MVDR (ExMVDR) algorithm is presented. Simulation results show that ExMVDR can suppress the side-lobe well and improve the SNR of main lobe about 2dB.

Key words: improper; complex vector; MVDR; extended autocorrelation matrix

## 1 引 言

波束形成是声纳信号处理的基础, 其目的是使多元阵构成的基阵经过适当处理得到在预定方向的指向性。具体说, 就是将一定几何形状(直线、圆柱等)排列的多元基阵各阵元输出经过处理(例如加权、延时、求和等)形成空间指向性的方法。假设一个由  $n$  个无方向性阵元组成的直线阵列, 其阵列

信号模型可以描述为

$$x(k) = a(\theta)s(k) + n(k) \quad (1)$$

式中, 接收信号为列向量  $x(k) = [x_1(k), \dots, x_N(k)]^T$ , 驱动向量  $a(\theta) = [a_1(\theta), \dots, a_N(\theta)]^T$ ,  $s(t)$  是单目标信号,  $n(t)$  是背景噪声,  $(\cdot)^T$  为转置运算。

波束指向方向上的输出含有该方向上目标声源发射的信号, 也含有来自其它方向上的干扰信号。为减少基阵对非期望方向上干扰的响应, 需要构造一个约束的最优化问题。最优化问题的准则是在保证波束指向方向上信号的输出功率不变的前提下, 使波束输出功率达到最小。

给定条件

$$c^H(\theta, f)a(\theta, f) = 1 \quad (2)$$

收稿日期: 2007-01-15; 修回日期: 2007-05-08

基金项目: 上海市科委基础研究项目(No: 05JC14026); 国家重点实验室开放式基金项目(VSN-2006-04)

作者简介: 贾鹏(1973-), 男, 安徽人, 博士, 从事信号处理研究。

通讯作者: 丛丰裕, E-mail: frankfycong@yahoo.com.cn

式中,  $c(\theta, f)$  和  $a(\theta, f)$  分别为频率  $f$  时的权值向量和驾驶向量,  $^H$  为共轭转置运算。

满足上式时, 波束形成器的输出功率

$$P(\theta, f) = c^H(\theta, f) R_{X(f)}(f) c(\theta, f), \quad (3)$$

达到最小。式中  $R_{X(f)}(f)$  是频率  $f$  时的阵列协方差矩阵, 即

$$R_{X(f)}(f) = E\{X(f)X^H(f)\}, \quad (4)$$

式中,  $X(f) = [X_1(f), \dots, X_N(f)]^H$ ,

$$X_i(f) = \sum_{k=0}^{K-1} X_i(k) e^{-j2\pi k f K}, j^2 = -1, i=1, \dots, N.$$

上述问题等效为对加权向量进行约束, 使波束指向方向上形成一个单位幅度输出, 同时使基阵的均方输出达到最小。求解这个问题要用拉格朗日法来完成。构造一个代价函数

$$H(c(\theta, f)) = P(\theta, f) + \kappa[1 - c^H(\theta, f)a(\theta, f)], \quad (5)$$

式中  $\kappa$  是任意常数。

将上式对  $c(\theta, f)$  求微分并令其为零, 则可得最佳权值向量为

$$c(\theta, f) = \frac{R_{X(f)}(f)^{-1}a(\theta, f)}{a^H(\theta, f)R_{X(f)}(f)^{-1}a(\theta, f)} \quad (6)$$

此即最小方差无失真响应<sup>[1]</sup>(Minimum Variance Distortionless Response-MVDR)波束形成的基本思想。

由公式(2)至公式(6)可知, MVDR 的运算数据是复值的。过去的几十年里, 复值向量特性对 MVDR 性能的影响并没有得到足够重视。本文就研究针对复值向量特性的 MVDR 算法。

## 2 非正则复向量简介

文献<sup>[2-7]</sup>详细介绍了复向量的特性。方便下文公式推导, 首先对非正则(improper)复向量作一介绍。

假设一个可测复空间  $C^n$  内的  $n$  维复随机向量  $x = x_R + jx_I$ , 其自相关矩阵为

$$R = E\{xx^H\}, \quad (7)$$

其伪自相关矩阵为

$$P = E\{xx^T\}, \quad (8)$$

[定义] 若可测复空间  $C^n$  内的  $n$  维复随机列向量  $x$  的伪自相关矩阵为零矩阵, 即,  $P=0$ , 则  $x$  是正则复随机向量(proper complex random vector); 若可测复空间  $C^n$  内的  $n$  维复随机列向量  $x$  的伪自相关矩阵不是零矩阵, 即,  $P \neq 0$ , 则  $x$  是非正则复随机向量(improper complex random vector)。

本文重点研究非正则复随机向量。下面, 给出正则复随机向量的存在条件, 从而确定评判复随机向量是否是正则的标准。  $R_{RR} = E\{x_R x_R^T\}$ ,  $R_{RI} = E\{x_R x_I^T\}$ ,  $R_{IR} = E\{x_I x_R^T\}$ ,  $R_{II} = E\{x_I x_I^T\}$ , 并且,  $R_{RI} = R_{IR}^T$ , 伪自相关矩阵  $P$  可表示为,

$$P = (R_{RR} \ R_{RI}) + j(R_{IR} + R_{RI}^T), \quad (9)$$

那么, 当  $P=0$  为零时, 必有

$$R_{RR} = R_{II}, R_{RI} = -R_{RI} \quad (10)$$

也就是说, 当且仅当  $x$  的实虚部方差相等, 并且实部与虚部互不相关时,  $x$  才是正则的, 否则  $x$  就是非正则复向量。

[引理] 假设一个可测复空间  $C^n$  内的  $n$  维非正则复随机列向量  $x$ , 如果其组成元素之间互不相关, 当且仅当其自相关矩阵与伪自相关矩阵都为对角阵, 即,

$$R_{xx} = E\{xx^H\} = D_R$$

$$P_{xx} = E\{xx^T\} = D_P, \quad (11)$$

非正则复向量的特性已经成功被应用在复信号盲分离算法中<sup>[8-9]</sup>, 也已经被证明其在复信号处理中的有效性。下面就针对非正则复向量推导扩展的 MVDR 算法。

## 3 扩展 MVDR 算法

首先验证公式(4)中的复向量  $X(f)$  是非正则的, 进而推导扩展算法。

### 3.1 非正则复向量验证

假设 32 阵元线阵, 阵元间距 0.75m, 入射信号是 1000Hz 单频信号, 采样频率为 6kHz, FFT 长度是 1024 点, 信噪比为 -21dB 的背景噪声干扰。  $X(f)$  是一个 32 元的列向量。分别计算这个列向量实部和虚部的方差之比和相关性。由图 1 可知,  $X(f)$  的实虚部方差大小并不完全相等, 并且二者也有一定的相关性。这就说明  $X(f)$  是非正则的。需要说明的是, 一个向量经过 FFT 运算后得到的复向量是正则的, 但  $X(f)$  并不是一个向量的 FFT 结果, 而是一个数据矩阵经过 FFT 运算后得到的复矩阵的一列。这个数据矩阵的行代表频率, 列代表阵元。  $X(f)$  是所有阵元接收的时域数据经过 FFT 运算后在频率为  $f$  时的列向量, 因此  $X(f)$  是非正则的。

### 3.2 扩展算法

根据文献[3], 首先构造扩展的(Extended)频域内接收数据。定义  $2N$  维列向量  $Z_R(f)$  和  $2N$  维行向量  $Z_P(f)$  如下:

$$Z_R(f)=[X_1(f), \dots, X_N(f), X_1^*(f), \dots, X_N^*(f)]^H \quad (12)$$

$$Z_P(f)=[X_1(f), \dots, X_N(f), X_1^*(f), \dots, X_N^*(f)]^H \quad (13)$$

式中, \* 表示共轭运算。

由式(12)和(13)得到扩展自相关矩阵,

$$R_{Ex}(f)=E\{Z_R(f)Z_P(f)\}, \quad (14)$$

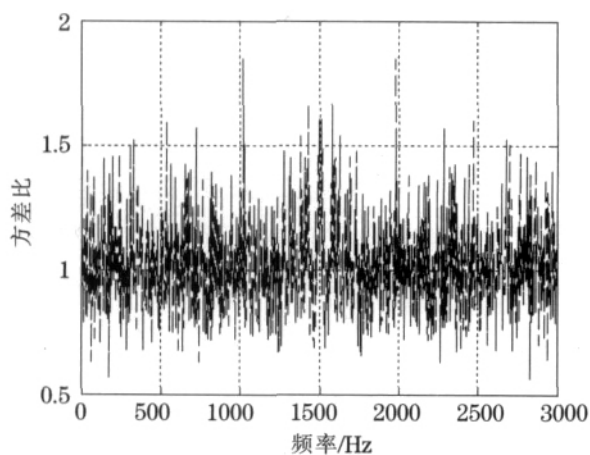
类似地, 可以构造扩展的驱动向量  $a_R(\theta, f)$ ,  $a_P(\theta, f)$ , 通过式(6)可以获得扩展的权值向量  $c_{Ex}(\theta, f)$

$$c_{Ex}(\theta, f)=\frac{R_{Ex}(f)^{-1}a_R(\theta, f)}{a_P(\theta, f)R_{Ex}(f)^{-1}a_R(\theta, f)}, \quad (15)$$

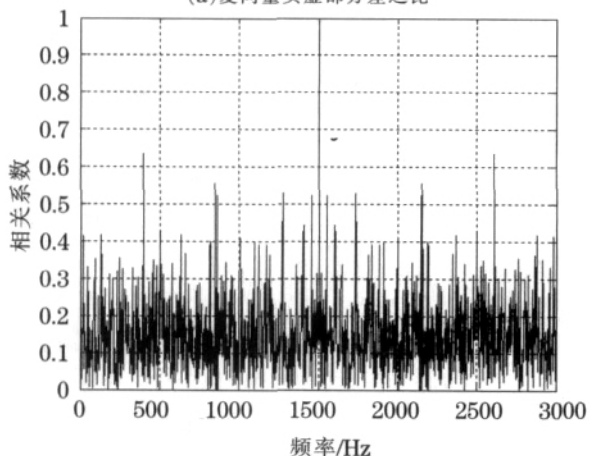
将扩展的自相关矩阵和扩展的权值向量带入到公式(3)中, 得到

$$P_{Ex}(\theta, f)=c_{Ex}^H(\theta, f)R_{Ex}(f)c_{Ex}(\theta, f). \quad (16)$$

这就是扩展 MVDR 波束形成输出, 记为 ExMVDR。



(a)复向量实虚部方差之比



(b)复向量实虚部相关性

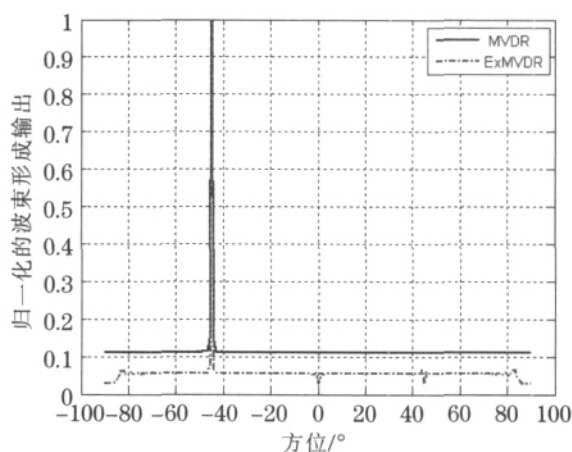
图1 非正则复向量验证

Fig.1 Validation of improper complex vector

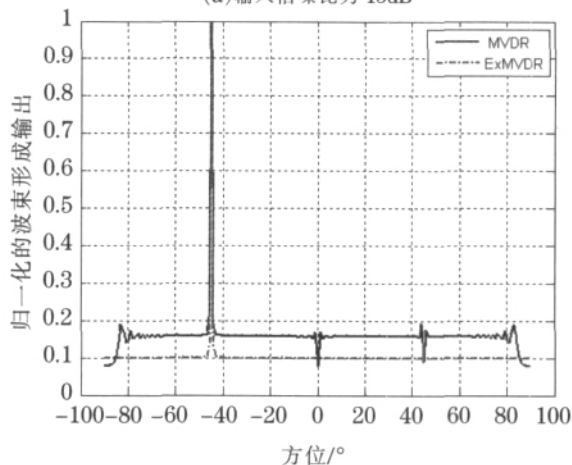
## 4 仿真实验

现在通过仿真试验对比公式(16)与(3)的性能。仿真试验参数设置与3.1节相同。在信噪比分别

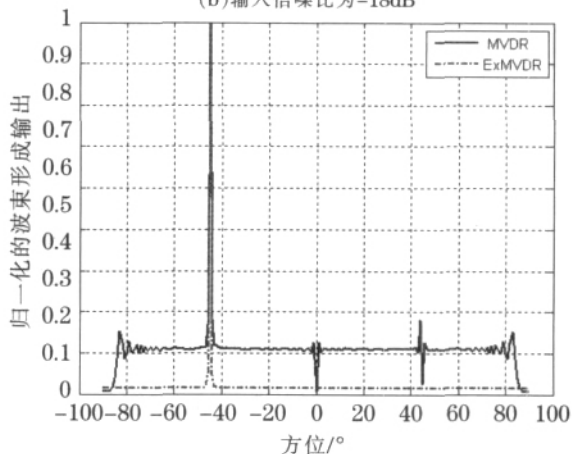
为-15dB, -18dB, 和-21dB 的背景噪声干扰下, 分别运算 200 次计算 ExMVDR 和 MVDR 的输出, 最后取平均结果进行比较。为方便比较, 波束形成输出均被归一化。



(a)输入信噪比为-15dB



(b)输入信噪比为-18dB



(c)输入信噪比为-21dB

图2 ExMVDR 和 MVDR 算法计算结果

Fig.2 Comparison between ExMVDR and MVDR

图2的横坐标是方位  $\theta$ , 纵坐标是归一化的波束形成器输出功率。图2的3幅图表明 ExMVDR 算法是非常有效的, 能够更好的压制旁瓣, 经过计

算,主波束的信噪比有 2dB 左右的提高。通过第二节对非正则复向量性质的介绍可见 ExMVDR 比 MVDR 增加了约束条件,扩展的自相关矩阵、扩展的驾驶向量和扩展的权值向量完全应用了非正则复变量的二阶非正则性。与 MVDR 相比,ExMVDR 更加严格按照欧式空间内的非正则复变量的运算法则,这使得计算结果更加准确,因此波束形成主波束输出信噪比得到提高。

## 5 结 论

所有阵元接收的时域数据经过 FFT 运算后在某一频率  $f$  下的列向量是复值的,这个向量的实虚部方差并不相等,且实部与虚部有相关性,因此该向量是非正则的。非正则复向量的伪自相关矩阵是存在的,通过构造扩展自相关矩阵和扩展驾驶向量所推导出的扩展 MVDR 波束形成算法最充分利用了非正则复向量的信息量,仿真试验也表明所提出的 ExMVDR 算法性能优于 MVDR。本文提出的思路可以在其它的波束形成和卷积混合盲分离的频域算法<sup>[10]</sup>中得以扩展。

### 参 考 文 献

[1] 徐钧, 焦君圣, 陈浩. 随机相幅误差对舷侧阵 MVDR 波束形成器阵增益的影响[J]. 声学技术, 2006, 25(3): 187-191.

XU Jun, JIAO Junsheng, CHEN Hao. Array gain analysis of MVDR beamforming in the presence of amplitude and phase error[J]. Technical Acoustics, 2006, 25(3): 187-191.

[2] Schreier P J, Scharf L L. Second-order analysis of improper complex random vectors and processes[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(3): 714-725.

[3] Neeser F D, Massey J L. Proper complex random processes with applications to information theory[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1993, 39(4): 1293-1302.

[4] Picinbono B, Bondon P. Second-order statistics of complex signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(2): 411-420.

[5] Picinbono B. Second-order complex random vectors and normal distributions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(10): 2637-2640.

[6] Picinbono B. On circularity[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(12): 3473-3482.

[7] Picinbono B, Chevalier P. Widely linear estimation with complex data[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(8): 2030-2033.

[8] 丛丰裕, 雷菊阳, 许海翔, 等. 在线增强型复值混合信号盲分离算法研究[J]. 西安交通大学学报, 2006, 40(9): 1070-1073.

CONG Fengyu, LEI Juyang, XU Haixiang, et al. Online blind separation of enforced mixed complex-value signal sources[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2006, 40(9): 1070-1073.

[9] Jan Eriksson, Visa Koivunen. Complex Random Vectors and ICA Models: Identifiability, Uniqueness and Separability[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(3): 1017-1029.

[10] 王颖翠, 陈励军. 宽带盲波束形成与卷积混合盲源分离[J]. 声学技术, 2003, 22(1): 40-43.

WANG Yingcui, CHEN Lijun. Wideband blind beamforming and blind separation of convolved mixtures[J]. Technical Acoustics, 2003, 22(1): 40-43.