

# 检测和估值引论

B. Picinbono

(法国信号和系统实验室)

**摘要** 本文对检测问题和估值问题作了一般性介绍。在第一部分里简要地说明了两种不同的观点。随后说明在高斯噪声情况下，检测和估值之间有密切的联系，并给出了一些实例。本文特别对自适应检测提出了一些想法，它需要纯参考噪声的估值。文中对纯参考噪声给出了定义，并用它设计了一种检测接收机。

## 一、引言

在一篇学术报告中要一般地介绍检测和估值问题及其一些最新的结果是困难的。已经出版了一批关于检测问题的优秀著作（都有几百页），而对于这个命题所涉及的全部问题要简略地给出一个概念是绝对不可能的。因此，我们任意选择一些和本讨论会有关的感兴趣的问题。但是，对于有关的问题，显然我们将不能全部给出详细论述，这些详细内容可在经典著作<sup>[1,2]</sup>中找到。本报告在简要地说明检测和估值的经典理论以后，试图介绍关于检测和估值之间关系的一些最新结果，并着重讨论关于自适应检测的一些结果，实际上这是一个很大和很重要的问题，但是只有少许明显的结果。

## 二、作为双择假设检验的检测

### 1. 概念和符号

我们从 $N$ 维空间的观察矢量  $\mathbf{x}$  开始。数目  $N$  可以很大，甚至是无穷大，后者相应于连续的随机过程。但是，在最初的所有计算中，我们将假设  $N$  是有限的。对于这个观察，我们必须确定它属于两个假设  $H_0, H_1$  中的哪一个。显然，我们限于双择检验问题只是为了简化表示式。假设  $H_0$  和  $H_1$  是简单的，即在  $H_{0,1}$  下观察的概率密度  $p_{0,1}(\mathbf{x})$  是已知的。检测问题归结为寻找一个函数  $\Phi(\mathbf{x})$ ， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ，它把观察空间划分为两个区域  $R_0$  和  $R_1$ ，这个函数称为检验函数或策略(strategy)，它的值只取 0 或 1。根据  $\Phi(\mathbf{x})=1$  或 0 来决定接受  $H_1$  或  $H_0$ 。为了得到  $\Phi(\mathbf{x})$ ，我们必须引进检测准则。

### 2. 贝叶斯策略

在这个策略中，我们假设  $H_0$  或  $H_1$  的先验概率是已知的 ( $\pi_0, \pi_1=1-\pi_0$ )。在许多问题

\*原文题目“Introduction to Detection and Estimation.”

中，特别是在雷达或声纳问题中，要引进这样的假定是困难的。此外，我们假设，引进具有实际意义的代价 (cost) 函数  $C_{ij}$  是可能的，它是当  $H_j$  是真实的时候，判决为  $H_i$  的代价。正确地指定代价往往是困难的，而这点在下面将要被讨论到。

贝叶斯策略  $\Phi^B(x)$  是按平均代价  $O$  最小的意义来定义的。显然  $O$  定义为

$$O = \int \sum_{ij} C_{ij} \Phi_i(x) \pi_j p_j(x) dx \quad (2.1)$$

这里  $\Phi_1(x) = \Phi(x)$  而  $\Phi_0(x) = 1 - \Phi(x)$ 。通过引进虚警概率  $\alpha$  和检测概率  $\beta$ ，我们可立即简化这个表示式。

$$\alpha = \int \Phi(x) p_0(x) dx \quad (2.2)$$

$$\beta = \int \Phi(x) p_1(x) dx \quad (2.3)$$

经很简单的计算后，我们把  $O$  写为

$$O = C_0 - \pi_1 \gamma_1 (\beta - k\alpha) \quad (2.4)$$

这里  $k = \pi_0 \gamma_0 / \pi_1 \gamma_1$ ，而  $\gamma_0 = C_{10} - C_{00}$ ， $\gamma_1 = C_{01} - C_{11}$ 。

在方程 (2.4) 中，仅  $\alpha$  和  $\beta$  依赖于  $\Phi$ 。因此，贝叶斯策略  $\Phi_k^B$  应对于给定的  $k$ ，给出  $\beta - k\alpha$  的最大值。这个表示式能写成

$$B = \beta - k\alpha = \int \Phi(x) [p_1(x) - kp_0(x)] dx \quad (2.5)$$

当  $p_1(x) - kp_0(x) > 0$ ，只要  $\Phi(x) = 1$ ，显然能得到  $B$  的最大值，因此我们有经典结果

$$\Phi_k^B(x) = 1 \leftrightarrow L(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} > k \quad (2.6)$$

函数  $L(x)$  是似然比，因此贝叶斯策略导致似然比检验。

### 3. 牛曼—皮尔逊策略

贝叶斯策略依赖于方程 (2.4) 定义的  $k$ 。很清楚，对于许多问题  $k$  是没有实际意义的，因为我们不知道  $\pi_1$  和  $C_{ij}$ 。因此需要另外的策略。我们试图寻找一个检验函数  $\Phi^{NP}(x)$ ，它满足：

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \alpha_0 \\ \beta &\text{最大} \end{aligned} \quad (2.7)$$

众所周知 (参看附录 A)，

$$\Phi_{\alpha_0}^{NP} = \Phi_{k_0}^B \quad (2.8)$$

其中， $k_0$  满足

$$a(k_0) = \alpha_0 \quad (2.9)$$

而

$$a(k) = \alpha[\Phi_k^B]$$

这就是检验  $\Phi_k^B$  的虚警概率。因此牛曼—皮尔逊策略直接和贝叶斯策略相联系。这个检验很显然仍是似然检验，这是因为对于我们的假设检验问题， $L(x)$  是充分统计量。

## 三、线性估值

我们将简要地概括线性估值的经典结果，它对下面的讨论是有用的。同前面一样，我们

以观察  $\mathbf{x}$  是零均值二阶矢量作为出发点。我们要估值矢量  $\mathbf{y}$ ，它也是零均值二阶矢量。假设协方差矩阵

$$\Gamma_{\mathbf{xx}} \equiv E[\mathbf{xx}'], \Gamma_{\mathbf{xy}} \equiv E[\mathbf{xy}'] \quad (3.1)$$

是已知的。 $\mathbf{y}$  的估值是线性的，能写成

$$\mathbf{y}_{\text{估}} \equiv E[\mathbf{y} | \mathbf{x}] = \mathbf{R}_{\mathbf{yx}} \mathbf{x} \quad (3.2)$$

整个问题是要计算  $\mathbf{R}_{\mathbf{yx}}$ ，以得到均方意义上的最小误差。让我们引进估值的误差  $\mathbf{z}$ ，它定义为

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{\text{估}} \quad (3.3)$$

误差矩阵定义为

$$\mathbf{s}^2 \equiv E[\mathbf{zz}'] \quad (3.4)$$

众所周知，均方意义上的最佳估值由投影定理确定，写为

$$\mathbf{y}_{\text{估}} = \text{Proj}[\mathbf{y} | \mathbf{x}] \longleftrightarrow \mathbf{z} \text{ 垂直于 } \mathbf{x} \quad (3.5)$$

这个方程等价于 Wiener-Hopf 方程：

$$E[\mathbf{y}_{\text{估}} \mathbf{x}'] = E[\mathbf{yx}'] \quad (3.6)$$

或应用方程(3.1)写成

$$\mathbf{R}_{\mathbf{yx}} \Gamma_{\mathbf{xx}} = \Gamma_{\mathbf{yx}} \quad (3.7)$$

若  $\Gamma_{\mathbf{xx}}$  是正则矩阵，我们得到

$$\mathbf{R}_{\mathbf{yx}} = \Gamma_{\mathbf{yx}} \Gamma_{\mathbf{xx}}^{-1} \quad (3.8)$$

在这种情况下，均方误差能写成

$$\mathbf{s}^2 = E[(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\text{估}})(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\text{估}})'] = \Gamma_{\mathbf{yy}} - \Gamma_{(\mathbf{y})\mathbf{y}_{\text{估}}} = \Gamma_{\mathbf{yy}} - \Gamma_{\mathbf{yx}} \Gamma_{\mathbf{xx}}^{-1} \Gamma_{\mathbf{yx}}' \quad (3.9)$$

我们应用方程(3.7)来简化这个方程而写为

$$\mathbf{s}^2 = \Gamma_{\mathbf{yy}} - \mathbf{R}_{\mathbf{yx}} \Gamma_{\mathbf{xx}} \mathbf{R}_{\mathbf{yx}}' \quad (3.10)$$

和  $\mathbf{x}$  正交的矢量  $\mathbf{z}$  有时称为修正量(innovation)，它具有有趣的性质。

## 四、应用于高斯情况

在这一节，我们假设噪声是零均值、协方差矩阵为  $\Gamma$  的高斯过程。其概率分布密度显然是：

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}' \Gamma^{-1} \mathbf{x})\right] \quad (4.1)$$

让我们考虑两种不同情况的检测问题。

### 1. 确定信号

信号不是随机的，用矢量  $\mathbf{s}$  表示，因此信号存在时的概率分布密度是  $p_1(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ ，而用(2.6)式定义的似然比是

$$L(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x} - \mathbf{s}) / p(\mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{s}' \Gamma^{-1} \mathbf{s} - 2\mathbf{s}' \Gamma^{-1} \mathbf{x})\right] \quad (4.2)$$

为了检测信号，我们必须把这个函数和一个门坎比较。显然，应用这函数的对数是等价的。于是，接收机能写成

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{s}' \Gamma^{-1} \mathbf{x} \geq \lambda \quad (4.3)$$

因此，最佳接收机对观察  $\mathbf{x}$  是线性的，称为匹配滤波器。在白噪声情况中，显然有  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{x}$ 。对于这个计算，我们假设了，在方程 (4.2) 里  $\mathbf{s}' \Gamma^{-1} \mathbf{s}$  是有限的。如果不是这种情况，则属于奇异(singular)检测的情况。

解释这种情况是容易的。若  $\Gamma$  没有逆矩阵，则意味着至少随机变量  $\{\mathbf{x}_i\}$  中的一个能由其它分量来表示，即  $\mathbf{x}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{x}_j$ 。如果对于信号， $\mathbf{s}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{s}_j$ ，则很明显， $(\mathbf{x}_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{x}_j)$  是观察的函数，它在只有噪声的情况下为 0，在存在信号时不为 0，因此可使检测没有误差。这例子说明了，为什么奇异检测的条件与信号及噪声两者有关，而不是只依赖于噪声。

对前面的结果也可给以谱解释，它适用于噪声是平稳的且信号比噪声的相关时间长得多的情况。方程 (4.3) 可写成  $\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{u}' \mathbf{x}$ ， $\mathbf{u}' = \mathbf{s}' \Gamma^{-1}$ 。它对应于一个线性滤波器，其增益为：

$$G(\nu) = \mathbf{s}^*(\nu) / \gamma(\nu) \quad (4.4)$$

这里， $\mathbf{s}^*(\nu)$  是信号的付氏变换， $\gamma(\nu)$  是噪声谱。这就是匹配滤波器的标准表示式。此外，输出信噪比能写成

$$d^2 = \mathbf{s}' \Gamma^{-1} \mathbf{s} = \int |\mathbf{s}(\nu)|^2 / \gamma(\nu) \cdot d\nu \quad (4.5)$$

它表明了频率域中奇异检测的条件。

匹配滤波器有很有趣的性质，在这篇短文中不进行研究（参看文献【3】）。

## 2. 高斯信号

现在让我们假设信号是零均值高斯过程。由于两个零均值高斯随机过程之和具有同样的性质，因此我们推导出  $p_0(\mathbf{x})$ ， $p_1(\mathbf{x})$  具有方程 (4.1) 的结构，其参数为  $(\alpha_0, \Gamma_0)$ ， $(\alpha_1, \Gamma_1)$ 。通过对似然比取对数，我们很容易得到，检验被定义为：

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \lambda \quad (4.6)$$

$$\text{这里} \quad \mathbf{A} = \Gamma_0^{-1} - \Gamma_1^{-1} \quad (4.7)$$

方程 (4.6) 表明，最佳接收机是观察  $\mathbf{x}$  的二次型，这是一个经典结果。

# 五、检测和估值之间的关系

显然，检测和估值之间没有直接关系。然而在高斯情况下，检测理论要使用相关矩阵的逆。这一结果源于高斯定律的结构。而对于估值理论，无需高斯假设也要使用相关矩阵的逆。因此，看来可以找到共同的结构。我们将更精确地研究这一点。

## 1. 高斯信号的估值和检测

假设信号和噪声是独立的零均值高斯随机过程，方差为  $\Gamma_S$  和  $\Gamma_B$ 。方程 (4.7) 中的矩阵  $\mathbf{A}$  可写成

$$\mathbf{A} = \Gamma_B^{-1} - \Gamma_{S+B}^{-1} \quad (5.1)$$

现在让我们引进矩阵  $\mathbf{R}_S$ ，它应用于从观察  $\mathbf{S} + \mathbf{B}$  中对信号  $\mathbf{s}$  作线性估值的问题。根据方程 (3.8)，这个矩阵能写成

$$\mathbf{R}_S = \Gamma_{S, S+B} \Gamma_S^{-1} \Gamma_B^{-1} \quad (5.2)$$

由于  $S$  和  $B$  是独立的, 因此导出:

$$\Gamma_{S, S+B} = \Gamma_S \text{ 和 } \Gamma_{S+B} = \Gamma_S + \Gamma_B \quad (5.3)$$

于是可得到  $\mathbf{R}_S = (\Gamma_{S+B} - \Gamma_B) \Gamma_S^{-1} \Gamma_B^{-1}$ , 它给出

$$\Gamma_S^{-1} \Gamma_B^{-1} = \Gamma_B^{-1} - \Gamma_B^{-1} \mathbf{R}_S \quad (5.4)$$

方程(5.1)中的矩阵  $A$  变为

$$\mathbf{A} = \Gamma_B^{-1} \mathbf{R}_S \quad (5.5)$$

利用这个表示式, 方程(4.6)的检验  $\Delta(\mathbf{x})$  变为

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \Gamma_B^{-1} \mathbf{R}_S \mathbf{x} \quad (5.6)$$

$$= \mathbf{x}' \Gamma_{BS}^{-1} \mathbf{x} \quad (5.7)$$

这里,  $\mathbf{s}_{\text{估}}$  是从观察  $S+B$  中对  $\mathbf{s}$  作的最佳线性估值。这个表示式是有趣的, 因为它和确定信号的情况(匹配滤波器)完全相同, 只要把从观察  $S$  得到的信号估值  $\mathbf{s}_{\text{估}}$  代替已知信号  $\mathbf{s}$ 。显然, 接收机仍然是二次型, 但可分解为两个系统: (1) 线性估值,  $\mathbf{s}_{\text{估}} = \mathbf{R}_S \mathbf{x}$ ; (2) 匹配过滤,  $\mathbf{x}' \Gamma_{BS}^{-1} \mathbf{x}$ 。因此估值概念的引入使得高斯噪声背景下的确定信号检测和随机信号的检测之间有着密切的联系<sup>[4]</sup>。

## 2. 白噪声的情况<sup>[5]</sup>

我们现在假设噪声是离散的白噪声, 即是一个独立平稳随机变量序列。在这种情况下, 我们将看到, 应用预估(causal estimation)来代替以前考虑的一般估值是可能的。让我们考察时刻  $t_1$  到  $t_n$  之间的观察。似然比能写成

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_n^1) = \mathbf{L}(\mathbf{x}_{n-1}^1) \frac{p_1(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}^1)}{p_0(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}^1)} \quad (5.8)$$

这里,  $\mathbf{x}_n^1$  是序列  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ ;  $p_{1,0}$  是条件概率。

我们已假设噪声是白色的, 因此

$$p_0(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}^1) = p_0(\mathbf{x}_n) = (2\pi\sigma_B^2)^{-1/2} \exp(-\mathbf{x}_n^2 / 2\sigma_B^2) \quad (5.9)$$

信号加噪声显然不是白色的。我们知道, 条件概率  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}^1)$  仍然是高斯的, 其均值和方差为:

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}^1] = (\mathbf{x}_n)_{\text{估}} \quad (5.10)$$

$$(\sigma_n^2)_{\text{估}} = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_n - (\mathbf{x}_n)_{\text{估}})^2] \quad (5.11)$$

在这些表示式中,  $(\mathbf{x}_n)_{\text{估}}$  是依据  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  对  $\mathbf{x}_n$  作出的线性预估, 而  $(\sigma_n^2)_{\text{估}}$  是这个预估的方差。如果  $n$  足够大, 则  $(\mathbf{x}_n)_{\text{估}}$  是根据所有过去的观察, 在  $n$  时刻对信号加噪声作出的预估; 同时, 由于信号和噪声是平稳的,  $(\sigma^2)_{\text{估}}$  变得与  $n$  无关。因此, 我们能写出

$$p_1(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}^1) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(\mathbf{x}_n - (\mathbf{x}_n)_{\text{估}})^2 / 2(\sigma^2)_{\text{估}}] \quad (5.12)$$

对(5.8)式取对数, 很容易得到

$$\Delta(\mathbf{x}_n^1) = \Delta(\mathbf{x}_{n-1}^1) + \lambda_n \quad (5.13)$$

而

$$\lambda_n = \log \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{估}}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathbf{x}_n^2}{\sigma_B^2} - \frac{(\mathbf{x}_n - (\mathbf{x}_n)_{\text{估}})^2}{\sigma_{\text{估}}^2} \right]$$

$$= c + [\mathbf{x}_n (\mathbf{x}_n)_{\text{估}} - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_n)_{\text{估}}^2 - \mathbf{x}_n^2 (1 - \sigma_{\text{估}}^2 / \sigma_B^2)] / \sigma_{\text{估}}^2 \quad (5.14)$$

在这个表示式中,  $\mathbf{x}_n$  是观察,  $(\mathbf{x}_n)_{\text{估}}$  是依据所有过去的观察对  $\mathbf{x}_n$  的预估, 但  $\mathbf{x}_n = \mathbf{s}_n + \mathbf{b}_n$ , 因此显然有  $(\mathbf{x}_n)_{\text{估}} = (\mathbf{s}_n)_{\text{估}} + (\mathbf{b}_n)_{\text{估}}$ 。此外, 因噪声是白色的并与信号相互独立, 因此能得出结论:

$$(\mathbf{x}_n)_{\text{估}} = (\mathbf{s}_n)_{\text{估}} \quad (5.15)$$

这里,  $(\mathbf{s}_n)_{\text{估}}$  是依据观察  $\mathbf{x}_n = \mathbf{s}_n + \mathbf{b}_n$  对信号的估值。结果在  $\lambda_n$  的表示式中, 取决于观察的一项可写成

$$t_n(\mathbf{x}_n) = [\mathbf{x}_n(\mathbf{s}_n)_{\text{估}} - (\mathbf{s}_n)_{\text{估}}^2/2 - \mathbf{x}_n^2(1 - \sigma_{\text{估}}^2/\sigma_B^2)]/\sigma_{\text{估}}^2 \quad (5.16)$$

把这个式子和在白色高斯噪声中确定信号的结果进行比较是很有趣的。我们从方程(4.2)很容易看出,  $\Delta(\mathbf{x}_n^1)$  可以写成方程(5.13)的形式且

$$t_n^1 = [\mathbf{x}_n \mathbf{s}_n - \mathbf{s}_n^2/2]/\sigma_B^2 \quad (5.17)$$

(5.16)和(5.17)式之间的差别是  $(1 - \sigma_{\text{估}}^2/\sigma_B^2)\mathbf{x}_n^2$  项。如果用连续白噪声, 这项就消失了。但这类具有无限大功率的噪声在实验上当然是无法实际实现的。

最后, 我们注意到: 方程(5.13)和(5.14)不是构成似然比的递推方程。 $(\mathbf{s}_n)_{\text{估}}$  一般需要  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  的知识。但我们知道, 如果  $\mathbf{s}_n$  是具有马尔可夫表示式的高斯过程, 则根据 Kalman-Bucy 算法能导出计算  $(\mathbf{s}_n)_{\text{估}}$  和  $\Delta(\mathbf{x}_n)$  的递归方法。

## 六、自适应检测

### 1. 引言 纯参考噪声

前面所有讨论的结构都是根据信号和噪声的一定假设, 特别是根据高斯过程的假设和相关函数的知识得到的。很清楚, 这种情况在实际上并不是普遍的, 因此需要设想和构造最佳的并能自适应的系统。这就是说, 在一般情况下, 这种系统不需要对信号和噪声有过多的假设。

要提出涉及兼有最佳和自适应性能的一般理论是困难的。在这方面的一个设想曾在以前的北约国家高级讨论会上提出过<sup>[6,7]</sup>。这些论文特别探讨了, 在噪声具有稳定谱性质而其瞬时功率具有很强变化的情况下, 在匹配滤波器之前使用自动增益控制(AGC)的问题。在同样的方面, 还有其它许多研究工作, 特别是关于多个传感器系统<sup>[8,9]</sup>。

应用 AGC 系统的一个重要问题是受作为噪声的强信号干扰。因此, 需要引进对信号不敏感的 AGC 系统, 可称为纯参考噪声 RNA (reference noise alone)。我们将给出关于这个问题的初步想法。

### 2. 关于匹配滤波器的解释

首先我们将证明, RNA 可出现在第四节所阐述的经典匹配滤波器理论中。我们已经看到, 最佳接收机计算

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{s}' \Gamma^{-1} \mathbf{x} = \sigma' \mathbf{x} \quad (6.1)$$

并把此结果和门坎比较。

信号  $\mathbf{s}$  和观察  $\mathbf{x}$  是空间  $\mathbf{R}^N$  中的矢量。在这空间中我们能应用投影定理,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}_{\perp} \quad (6.2)$$

这里,  $\mathbf{x}_{\perp}$  是  $\mathbf{x}$  在正交于  $S$  的  $\mathbf{R}^N$  子空间  $\mathbf{E}_{\perp}$  中的投影。显然

$$\mathbf{x}_S = (\mathbf{s}'\mathbf{x}/s^2) \cdot \mathbf{s} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - (\mathbf{s}'\mathbf{x}/s^2) \cdot \mathbf{s} \quad (6.4)$$

(6.2)式的分解能应用于  $\mathbf{R}^N$  中的任何矢量  $\mathbf{x}$ 。特别是显然有

$$\mathbf{s} = \mathbf{s} + 0 \quad (6.5)$$

这意味着  $\mathbf{E}_{\perp}$  是一 RNA 空间，其中决不存在信号。因此，所有由  $\mathbf{x}_{\perp}$  所作的估值过程也都是 RNA。(6.2)式的分解也可应用于  $\sigma$  和  $\mathbf{b}$ ，写成

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_{\perp} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_S + \mathbf{b}_{\perp} \quad (6.7)$$

相关矩阵  $\Gamma_{\mathbf{B}} = \mathbf{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}']$  也能被划分为如下的形式：

$$\Gamma_{\mathbf{B}} = \left( \begin{array}{c|c} \Gamma_{\perp} & \gamma \\ \hline \gamma & \sigma^2 \end{array} \right) \quad (6.8)$$

$$\text{这里 } \Gamma_{\perp} = \mathbf{E}[\mathbf{b}_{\perp} \mathbf{b}_{\perp}']; \gamma = \mathbf{E}[\mathbf{b}_{\perp} \mathbf{b}_S']; \sigma^2 = \mathbf{E}[\mathbf{b}_S \mathbf{b}_S'] \quad (6.9)$$

这样，方程(6.1)定义的检验函数也能写成

$$\Delta(\mathbf{x}) = \sigma_{\perp}' \mathbf{x}_{\perp} + \sigma_S' \mathbf{x}_S \quad (6.10)$$

这里，矢量  $\sigma$  被定义为

$$\Gamma_{\mathbf{B}} \sigma = \mathbf{s} \quad (6.11)$$

应用(6.5)，(6.6)和(6.8)式，这方程能被写为

$$\Gamma_{\perp} \sigma_{\perp} + \Gamma_{\perp S} \sigma_S = 0 \quad (6.12)$$

它给出

$$\sigma_{\perp} = -\Gamma_{\perp}^{-1} \Gamma_{\perp S} \sigma_S \quad (6.13)$$

因此，检验  $\Delta(\mathbf{x})$  变为

$$\Delta(\mathbf{x}) = \sigma_S' \mathbf{x}_S - \sigma_S' \Gamma_{\perp S} \Gamma_{\perp}^{-1} \mathbf{x}_{\perp} = \sigma_S' (\mathbf{x}_S - (\mathbf{x}_S)_{\perp}) \quad (6.14)$$

这里\*

$$(\mathbf{x}_S)_{\perp} = \Gamma_{\perp S} \Gamma_{\perp}^{-1} \mathbf{x}_{\perp} \quad (6.15)$$

通过与方程(3.2)和(3.7)比较，我们看到， $\mathbf{x}_{\text{估}}$  是利用观察  $\mathbf{x}_{\perp}$  (它是 RNA) 对噪声分量  $\mathbf{b}_S$  所作的最佳线性估值。

现在让我们计算分量  $\sigma_S$ 。显然有\*

$$\sigma_S = \frac{\mathbf{s}'\sigma}{s^2} \cdot \mathbf{s} = \frac{\mathbf{s}'\Gamma_{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{s}}{s^2} \cdot \mathbf{s} = \frac{d^2}{\mathbf{E}} \mathbf{s} \quad (6.16)$$

这里， $\mathbf{E}$  是信号  $\mathbf{s}$  的能量； $d^2$  是匹配滤波器的输出信噪比。于是，检验可写为\*

$$\Delta(\mathbf{x}) = \frac{d^2}{\mathbf{E}} \mathbf{s}' (\mathbf{x}_S - (\mathbf{x}_S)_{\text{估}}) \quad (6.17)$$

它与方程(6.1)等价，但有另外的解释。

这个系统的方框图如图1所示。

从这个方框图我们看到， $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{s}$  是用于在白噪声情况下检测信号  $\mathbf{s}$  的匹配滤波器（见方

\* 原式有误。——校者

程 (6.1))。在这种情况下,  $x_s$  和  $x_{\perp}$  是独立的, 显然有  $(x_s)_{\text{估}} = 0$ , 因此系统简化为在白噪声下的经典匹配滤波器。但是, 若噪声不是白色的, 则可以看到, 这只能用来计算在  $s$  方向的噪声分量, 而这分量显然是一个 RNA。此外, 我们可以很简单地说明奇异检测情况。如果由  $x_{\perp}$  (也就是  $b_{\perp}$ ) 可以无误差地对  $x_s$  (也就是  $b_s$ ) 作估计, 那么可以看到, 当没有信号时,  $\Delta(x) = 0$ ; 而当有信号时,  $\Delta(x) \neq 0$ 。这样, 对这个信号可作出理想检测。

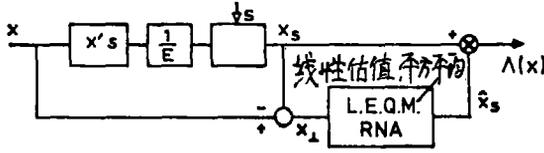


图1. 匹配滤波器的示意图

### 3. 功率的 RNA 估值法

要构成在强信号存在时不受干扰的 AGC 系统, 不必用观察  $x$  的全体, 而只用它的 RNA 分量来估计噪声功率就足够了。这样的估值与信号存在与否无关。众所周知, 依据随机信号的先验知识有两种良好的功率估值。第一种估值显然是

$$P_{\text{估}} = x'x/n \quad (6.18)$$

但是, 如果我们有关于  $x$  的归一化相关函数  $\Gamma_N$  的先验知识, 就有了最佳的功率估值器, 它能写成

$$(P_0)_{\text{估}} = x' \Gamma_N^{-1} x/n \quad (6.18')$$

这个估值器的物理意义是, 用  $\Gamma_N^{-1}$  可以从相关样本  $x$  得到不相关样本, 从而获得最佳的功率估值。在白噪声情况下,  $(P_0)_{\text{估}}$  等价于  $P_{\text{估}}$ 。如果我们希望作 RNA 估值, 那么我们就应在方程 (6.18) 和 (6.18') 中用  $x_{\perp}$  代替  $x$ 。这时, 对白噪声情况有意义的第二种估值可写为

$$P_{\text{估}} = x_{\perp}' x_{\perp} / m \quad (6.19)$$

其中  $m = n - 1$ , 因为  $x$  是在  $R^n$  的子空间中。

应用方程 (6.4) 得到

$$P_{\text{估}} = [x'x - (s'x)^2 / s's] / m \quad (6.20)$$

很清楚,

$$P_{\text{估}}(b) = P_{\text{估}}(s + b) \quad (6.21)$$

这正是 RNA 的特征性质。

现在让我们考虑最佳估值  $(P_0)_{\text{估}}$  的情况。在这种情况下, 方程 (6.18') 写成

$$P_0 = x_{\perp}' \Gamma_{\perp}^{-1} x_{\perp} / m \quad (6.22)$$

它构成 RNA 估值。如同方程 (6.20) 一样, 有意义的是给出以总的观察表示的  $P_0$ 。有关的计算在附录 B 里。其结果是

$$x_{\perp}' \Gamma_{\perp}^{-1} x_{\perp} = x' \Gamma_N^{-1} x - (s' \Gamma_N^{-1} x)^2 / (s' \Gamma_N^{-1} s) \quad (6.23)$$

从这个表示式不难证明, 类似 (6.21) 的一个方程仍是成立的。

### 4. 自适应匹配滤波器

假设噪声有稳定的谱 (由  $\Gamma_1$  确定), 但有很强的功率变化。可以证明, 最佳接收机的形式是<sup>[10]</sup>:

$$T(x) = \frac{s' \Gamma_1^{-1} x}{[x' \Gamma_1^{-1} x]^{1/2}} \geq t \quad (6.24)$$

显然，上式分子是经典匹配滤波器 [(6.1)]，分母是功率的估值。因此，这个系统通过起伏功率的估值对匹配滤波器输出作调整。这个方法显然类似于在匹配滤波器之前的 AGC。

现在考虑强信号的情况。如果  $\mathbf{x} = \mathbf{k}s$ ，我们看到

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (s' \Gamma_1^{-1} s)^{1/2} = d \quad (6.25)$$

它独立于  $\mathbf{k}$ 。所以，在 AGC 的作用下，在无噪声时，大信号和小信号之间没有区别。这种情况不能令人满意，因而导致 RNA 型 AGC 的想法。

现在考虑另一种接收机  $\mathbf{T}'(\mathbf{x})$ ，定义为

$$\mathbf{T}'(\mathbf{x}) = \frac{s' \Gamma_1^{-1} \mathbf{x}}{[\mathbf{x}'_{1 \perp} \Gamma_1^{-1} \mathbf{x}_{1 \perp}]^{1/2}} \begin{matrix} \geq t \\ \leq t \end{matrix} \quad (6.26)$$

$\mathbf{T}(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{T}'(\mathbf{x})$  的分子是相同的 ( $N$ )，分母是不同的 ( $D, D'$ )。但从方程 (6.23) 我们看到

$$D'^2 = D^2 - N^2/d^2 \quad (6.27)$$

这里， $d^2$  和前面一样是  $s' \Gamma_1^{-1} s$ 。于是 (6.26) 能写成

$$\mathbf{T}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{T}(\mathbf{x})}{[1 - \mathbf{T}^2(\mathbf{x})/d^2]^{1/2}} \quad (6.28)$$

可以看到，只要  $\mathbf{T}^2 < d^2$  (正如前面看到的，这点是成立的)， $\mathbf{T}'(\mathbf{x})$  就是  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  的一个单调函数。由此得出结论： $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{T}'(\mathbf{x})$  在检测方面具有完全相同的性质。但是  $\mathbf{T}'(\mathbf{x})$  比  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  更有意义，因为如果  $\mathbf{x} = \mathbf{k}s$ ，我们得到  $\mathbf{T}' \rightarrow \infty$  来代替  $\mathbf{T} = d$ 。

这个例子很简单地表明了 RNA 在自适应检测问题中的意义。

在实际中，情况并不是这样简单的，因为信号是时间的函数，前述情况只是我们观察匹配滤波器输出的时刻才是成立的。不过总能找到一些有相似结果的类似结构。

#### 附录 A

贝叶斯策略和牛曼—皮尔逊策略

让我们考虑下述一类检验  $C_{\alpha_0}$ ：

$$\Phi \in C_{\alpha_0} \leftrightarrow \alpha[\Phi] \leq \alpha_0 \quad (a.1)$$

这里  $\alpha$  是用 (2.2) 式定义的。引进函数  $b(\mathbf{k})$ ：

$$b(\mathbf{k}) = \alpha[\Phi_{\mathbf{k}}^B] \quad (a.2)$$

这里  $\Phi_{\mathbf{k}}^B$  由 (2.6) 式定义。

如果存在一个  $\mathbf{k}_0$ ，使

$$b(\mathbf{k}_0) = \alpha_0 \quad (a.3)$$

则

$$\Phi_{\alpha_0}^{NP} = \Phi_{\mathbf{k}_0}^B \quad (a.4)$$

确实  $\forall \Phi$  有

$$\beta(\Phi) - \mathbf{k}_0 \alpha(\Phi) \leq \beta(\Phi_{\mathbf{k}_0}^B) - \mathbf{k}_0 \alpha(\Phi_{\mathbf{k}_0}^B) \quad (a.5)$$

因为，根据 (2.5) 式，贝叶斯策略  $\Phi_{\mathbf{k}_0}^B$  给出  $\beta - \mathbf{k}_0 \alpha$  的最大值。应用 (a.2) 和 (a.3)，我们推导出  $\forall \Phi$

$$\beta(\Phi) \leq \beta(\Phi_{\mathbf{k}_0}^B) - \mathbf{k}_0 [\alpha_0 - \alpha(\Phi)] \quad (a.6)$$

现在  $\forall \Phi \in C_{\alpha_0}$ ，从 (a.1) 得到

$$\beta(\Phi) \leq \beta(\Phi_{k_0}^p) \quad (\text{a.7})$$

它给出方程 (2.8)。

现在只需证明, 对于任何  $\alpha_0$ , 方程(a.3)成立。这点是由于

$$\mathbf{b}(k) = \int \Phi_k^p(\mathbf{x}) p_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{a.8})$$

这里  $\Phi_k^p$  是用 (2.6) 式来定义的。因此  $\mathbf{b}(k)$  具有一个重新划分函数 (repartition function) 的结构, 它保证了 (a.3) 式成立。

### 附录 B

让我们考虑一个正则对称矩阵  $\mathbf{M}$ 。矩阵

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} - \mathbf{M} \mathbf{s} \mathbf{s}' \mathbf{M} / (\mathbf{s}' \mathbf{M} \mathbf{s}) \quad (\text{b.1})$$

是一个 RNA, 因为

$$\mathbf{M}^* (\mathbf{s} + \mathbf{b}) = \mathbf{M}^* (\mathbf{b}) \quad (\text{b.2})$$

我们直接从 (b.1) 看到  $\mathbf{M}^* \mathbf{s} = 0$ 。

由此导出, 存在一个在子空间  $\mathbf{E}_{\perp}$  运算的矩阵  $\mathbf{M}_{\perp}$ , 使

$$\mathbf{x}' \mathbf{M}^* \mathbf{x} = \mathbf{x}'_{\perp} \mathbf{M}_{\perp} \mathbf{x}_{\perp} \quad (\text{b.3})$$

为了求  $\mathbf{M}_{\perp}$ , 我们应用下述划分:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{m} \\ \mathbf{m}' & \mathbf{c} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\perp} \\ \mathbf{x}_s \end{pmatrix} \quad (\text{b.4})$$

通过计算方程 (b.3) 的两项, 我们很容易求得:

$$\mathbf{M}_{\perp} = \mathbf{M}_1 - \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{m} \mathbf{m}' \quad (\text{b.5})$$

我们看到, 这个推导过程能用于方程 (6.23), 其中  $\mathbf{M} = \Gamma_1^{-1}$ 。因而问题是得到  $\Gamma_1^{-1}$  对于  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{m}$  和  $\mathbf{c}$  的关系式。为此, 我们从下列事实出发:  $\Gamma_1^{-1}$  是  $\Gamma_1$  的逆, 后者能写成 (6.8) 式。只有一点差别, 即  $\Gamma_1$  是归一化协方差矩阵:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{1\perp} & \gamma \\ \gamma' & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{b.6})$$

我们用  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  以相同形式表示  $\Gamma_1^{-1}$ , 并从  $\Gamma_1 \Gamma_1^{-1} = \mathbf{I}$  出发经简单计算后, 得到

$$\Gamma_1^{-1} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \Gamma_{1\perp}^{-1} + \lambda \lambda' & -\lambda \\ -\lambda' & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{b.7})$$

其中  $\lambda = \Gamma_{1\perp}^{-1} \gamma$  (b.8)

$$\alpha = (1 - \gamma' \Gamma_{1\perp}^{-1} \gamma)^{-1} \quad (\text{b.9})$$

通过应用方程 (b.5) 和 (b.7) 我们得到, 如果  $\mathbf{M} = \Gamma_1^{-1}$ ,

则  $\mathbf{M}_{\perp} = (\Gamma_1^{-1})_{\perp} = \Gamma_{1\perp}^{-1}$

它完全证明了方程 (6.23)。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] G. W. HELSTROM: Statistical theory of signal detection, Pergamon, 1968.
- [ 2 ] H. L. VAN TREES: Detection, estimation and modulation theory. Wiley, 1968.
- [ 3 ] I. BAR-DAVID: A sample path property of matched-filter outputs with applications to detection and estimation. IEEE. IT-22, 225, 1976.
- [ 4 ] T. KALLATH: Correlation detection of signals perturbed by a random channel. IEEE. IT-6, 361, 1960.
- [ 5 ] See Ref. (2), V.3, p.19.
- [ 6 ] G. VEZZOSI: What is optimality for an adaptive detection system. NATO Advanced Study on Signal Processing, 1973, Academic Press.
- [ 7 ] G. VEZZOSI: Detection d'un signal dans un bruit de loi incertaine. These de Doctorat d'Etat, Université de Paris-Sud, 1976.
- [ 8 ] H. MERMOZ: Ecueils et diversités des traitements adaptatifs d'antenne. Ann. Telecomm. 28, 244, 1973.
- [ 9 ] H. MERMOZ: Modularité du traitement adaptatif d'antenne. Ann. Telecomm. 29, 43, 1974.
- [10] See Ref. (6), on table III and also G. VEZZOSI and B. PICINBONO: Détection d'un signal certain dans un bruit sphériquement invariant. Structure et comparaison des différents récepteurs. Ann. Telecomm. 27, 95, 1972.

## 讨 论

J. W. R. Griffiths问: 请报告人解释一下, 为什么他的模型能说明“估值和插入”模型是最佳的? 这和 W. S. Hodgkiss 博士考虑的情况有什么差别? 他证明这样的系统是次最佳的。

答: 对于一般的情况, 如果存在着某个没有概率分布的不确定参数, 就不能应用贝叶斯策略。在许多情况中, 人们应用经典的结构并用其估值来代替这个不确定参数。但是, 不可能证明这样的系统是最佳的。在本论文里考虑的接收机在具有恒虚警率的这类接收机中是最佳的。但这是关于具有不确定功率问题的一个特殊性质。对于一般性问题已在文献[7]中进行了广泛的研究。

(郑肇本译 黄曾咏校)