

具有最陡主瓣的最小方差时频分析

沈希忠¹, 孟光²

(1. 上海应用技术学院机械与自动化学院, 上海 200235; 2. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

摘要: 针对非平稳时间序列, 基于最小方差谱估计提出自适应加窗的时频分析方法, 所叠加的时间窗能够自适应地调整尺寸, 使得所估计的谱具有最陡的瞬时主瓣以适应时频分析, 从而获得满意的非平稳信号的时频分布。仿真结果以及与参考文献的方法比较表明, 该方法能够提供更好的频率分辨率, 时频分布性能更好。

关键词: 非平稳, 自适应, 时变窗, 主瓣

中图法分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2008)-06-0888-04

Time-frequency analysis of minimum variance with the steepest main lobe

SHEN Xi-zhong¹, MENG Guang²

(1. Mechanical & Electrical department, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China;

2. National Key Laboratory for Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Adaptive time-frequency analysis of non-stationary time sequences is proposed based on minimum variance spectral estimation. Time windows are added to the sequences with adaptive window size to make the power spectral characterize with the steepest main lobe for the time-frequency analysis with the best performances.

Key words: non-stationary; adaptivity; varying window; main lobe

1 引 言

非平稳信号由于在地震、声学等领域中广泛存在而被高度重视, 其时频分析方法成为信号分析领域中的一个热点^[1-6]。其中, 最小方差谱估计 (Minimum Variance Spectral Estimation, MVSE) 是由 Capon 于 1969 年首次提出^[7], Lacoss 于 1971 年把它用于单个时间序列的谱估计, 并证明该方法对信号的谱成分具有最小方差无偏估计^[8]。以后该方法在各个领域得到了进一步的发展和应^[1]。

MVSE 是一种非参数的谱估计法, 与基于 Fourier 变换的非参数功率谱如周期图法相比, 能够提供较高的分辨率, 但与参数谱估计法如自回归谱

估计法相比, 分辨率有点低。MVSE 利用最优的滤波器组, 使得某一个具体的频率成分通过, 极大地衰减其它的频率分量^[1]。然而, 常规的 MVSE 只能应用于平稳信号的谱估计, 而不适合于具有时变频率的非平稳时间序列。为此, Özgen M T^[2]对 MVSE 进行扩展, 获得一种加窗的 MVSE 法 (WMVSE)。Chan S C 等进一步发展 WMVSE, 利用 ICI 规则选择加窗尺寸, 改进时频分辨率, 并提出递归实现的 MVSE^[3]。

窗的尺度给 WMVSE 带来偏差方差的折衷问题^[1-3]。窗的长度适当, 有助于减少由于附加噪声带来的估计方差, 避免自相关矩阵估计的额外偏差, 因此其选择至关重要。理论上, 最合适的窗口尺寸应该使功率谱的主瓣宽度最小。基于此, 本文提出了一种自适应选择窗口尺寸的 MVSE 算法 (简称 WMVLSE), 以获得更好的时频分布估计。

2 最小方差谱估计

首先简单介绍最小方差谱估计^[1]。设 FIR 滤波

收稿日期: 2008-04-28; 修回日期: 2008-07-30

基金项目: 本项目获得上海市教育委员会重点学科建设项目资助 (J51501)。

作者简介: 沈希忠 (1968-), 男, 博士, 教授, 研究方向为信号处理、神经网络等。

通讯作者: 沈希忠, E-mail: shenxizhong@online.sh.cn

器系数为 $a_k, 0 \leq k \leq p$ 。与线性预测问题不同, 此处 $a_n \neq 1$ 。让观测信号 $x(n) (0 \leq n \leq N-1)$ 通过该滤波器, 其响应为

$$y(n) = \sum_{k=0}^p a_k x(n-k) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{a} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_p]^T, \mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-p)]^T, T$ 为转置。设 $E[x(n)] = 0$, 则输出序列的方差为

$$\sigma_y^2 = E[|y(n)|^2] = \mathbf{a}^H \mathbf{R}_x \mathbf{a} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)]$ 为序列的自相关矩阵, H 为共轭转置, 此处假设观测信号为实序列。

FIR 滤波器在频率点 ω 处的频率响应满足归一化要求

$$\sum_{k=0}^p a_k e^{-j\omega k} = 1 \quad (3)$$

用矩阵形式表示为

$$\mathbf{a}^H \mathbf{e}(\omega) = 1 \quad (4)$$

此处 $\mathbf{e}(\omega) = [1 \ e^{-j\omega} \ \dots \ e^{-j\omega p}]^T, j = \sqrt{-1}$ 。

在约束条件式(4)下通过最小化方差式(2), 可以获得 FIR 滤波器, 使得频率成分在频率点 ω 处没有变形, 而在其它频率点得到极大的衰减。Lacoss 计算最小化的滤波器系数为^[1,8]

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{e}(\omega)}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{e}(\omega)} \quad (5)$$

将式(5)代入式(2), 得到最小化的方差

$$\sigma_{y, \min}^2 = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{e}(\omega)} \quad (6)$$

式(6)就是在频率点 ω 处的最小方差谱估计 $P_x^{\text{MVSE}}(\omega)$, 此处频率的变化范围为 $0 \leq \omega \leq \pi$, 即

$$P_x^{\text{MVSE}}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{e}(\omega)} \quad (7)$$

3 非平稳信号的最小方差谱估计

常规 MVSE 方法需要计算自相关矩阵, 该矩阵由整个数据序列估计, 是时不变的, 只能用于平稳随机信号的谱估计, 而不能用于具有时变的频率和自相关矩阵的非平稳随机信号谱估计^[3]。为此, Özgen 提出了加窗的 MVSE (记为 WMVSE), 对数据增加一个时变窗估计自相关函数, 改善 MVSE, 跟踪时变的频率信息^[2]。Chan 等提出应用置信区间的交集 (Intersection of Confidence Intervals, ICI 规则) 自适应地选择窗口长度^[3]。

与 Chan、Özgen 不同, 本文认为最合适的窗口

尺寸应该使功率谱的主瓣宽度最小。因此提出了一种自适应选择窗口尺寸的 WMVSE 算法 (为了方便记为 WMVLSE), 使所估计的功率谱在谱峰附近具有最陡的瞬时主瓣, 目的是获得更好的时频分布估计。

3.1 加窗的最小方差谱估计

为了跟踪时变的频率信息, Özgen 提出用当前输入向量估计瞬时自相关矩阵

$$\hat{\mathbf{R}}_x(n) = \varepsilon \mathbf{I} + \sum_{m=-M_r}^{+M_r} \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \quad (8)$$

也就是说, 通过一个滑动分析窗, 把信号分成在时刻 n 的时间窗数据段, 计算时间相关的自相关函数。这样就获得加窗的 MVSE (Windowed MVSE, WMVSE), 时频分布 $P_x^{\text{MVSE}}(n, \omega)$ 计算如下

$$P_x^{\text{MVSE}}(n, \omega) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{e}(\omega)} \quad (9)$$

3.2 自适应的窗口选择

滤波器阶数 p 和窗口尺寸 h 的选择将影响功率谱估计的时频分辨率。根据 Kay^[4] 的结论, 滤波器阶数 p 应该选得足够大, 以便获得较高的频率分辨率, 但是应该满足 $p \leq \frac{h}{2}$, 以避免额外的频谱变化。

而窗口尺寸 h 的选择对最小方差功率谱估计的时频分辨率至关重要。频谱内容变化越快, 应该选择小的窗口尺寸; 变化缓慢, 选择较大的窗口尺寸。但是, 非平稳信号同时存在一些变化较快和较慢的频率成分, 因此对于整个信号选择一个常数窗口尺寸并不适当^[3]。

假设最合适的窗口尺寸应该使功率谱的主瓣宽度最小, 使得所估计的功率谱在谱峰附近具有最陡的瞬时主瓣, 目的是获得更好的时频分布估计。WMVLSE 算法正是基于此而提出的。

假设一组窗口尺寸

$$\mathbf{h} = \{h_k | h_1 < h_2 < \dots < h_k, k=1, 2, \dots, K\} \quad (10)$$

对于每一个窗口尺寸, 可以获得一个最小方差功率谱估计 $P_{h_k}(n, \omega)$, 估计时滤波器阶数为不超过窗口长度的一半。

在各个窗口 $h_k, k=1, 2, \dots, K$ 下功率谱计算如下,

$$P_{h_k}(n, \omega) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{e}(\omega)} \quad (11)$$

最合适的窗口尺寸应该使得功率谱估计的泄漏尽量小, 也就是使主瓣能量尽量大。由于 WMVLSE 使用一组最优的滤波器, 使得在某个瞬时频率处的成分通过而使其它分量尽量衰减, 因此最合适的窗口尺

寸应该使功率谱在主瓣频率附近最陡,从而主瓣宽度最小。

最优的主瓣宽度选择再加上式(11)就构成了 WMVLSE。

3.3 WMVLSE 的主瓣宽度

由于非平稳信号的统计量具有时变性,其功率谱也是时变的,下面讨论其局部性质。

对于窄带信号,很容易找到一个谱峰(可能是局部谱峰),根据谱峰下降的高度就可以计算 WMVLSE 的主瓣宽度 w_b ,由此可以判断所加的时域窗口尺寸大小。

对于非平稳信号,当窗口尺寸增加时,参与计算的时间序列增加,加窗引起的泄漏减少,谱峰突出,主瓣宽度减小,而当瞬时频率变化加快时,由于增加的时间序列对于所计算的瞬时频率无效而使主瓣宽度增加,因此存在最优窗口尺寸 h_{opt} ,使得主瓣宽度最小。图 1 为具有频率线性增加的正弦信号在瞬时 $n=2$ 的功率谱估计,图中 h 为窗口尺寸,BandWidth 为主瓣宽度(其值用频率序列差值表示)。可以看出存在一个最优的窗口尺寸 $h=101$,使得主瓣宽度最小,BandWidth=12。

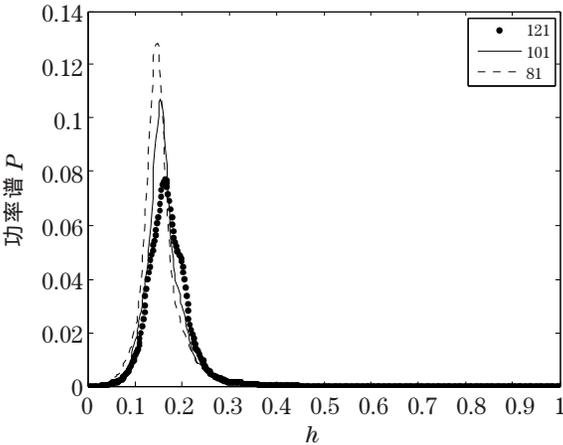


图 1 不同窗口尺寸下的功率谱估计

Fig.1 Power Spectral Estimation with different window size

下面说明其计算方法。假设非平稳信号在时刻 n 时,WMVLSE 在 $\omega=\omega_m$ 处取得最大值(窄带谱峰) $P_{max}=\max_{\omega}\{P_{h_k}(n,\omega)\}$,则其主瓣宽度 w_b 定义为功率谱下降至某一个功率谱值 P_w 处的频率宽度,即

$$w_b=w_{b-}+w_{b+} \tag{12}$$

此处, w_{b-}, w_{b+} 满足

$$\begin{aligned}
 P_{h_k}(n,\omega_m-w_{b-}) &= P_w \\
 P_{h_k}(n,\omega_m+w_{b+}) &= P_w
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

当功率谱值 P_w 的值过大时主瓣宽度 w_b 受到噪声的影响,过小时又不能体现算法中的主瓣,一般

由经验值确定,可以取 P_{max} 在 0.5~0.9 之间。

4 仿真结果

选用文献[3]提供的仿真例子来演示在频域加窗后的效果。即仿真信号为一个离散正弦信号 $x(t)$, $1 \leq t \leq 500$,其瞬时频率为 $f(t)=\text{asinh}(2t-500)/16+0.5$,采样率 $f_s=2\text{Hz}$,附加高斯噪声,信噪比 $SNR=10\text{dB}$,如图 2 所示。

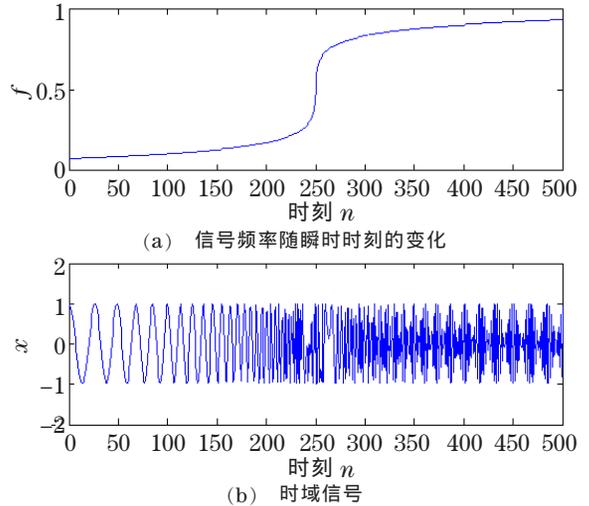


图 2 非平稳信号

Fig.2 Nonstationary Signal

图 3 为用 WMVLSE 获得的时频分布图,即用最小主瓣宽度获得窗口最佳尺寸,如图 6 所示(具体介绍见下文),然后计算最小方差获得时频分布。窗口长度 h_k 初始值设置为 101,根据主瓣宽度最小,自适应迭代获取每一个时刻 n 、每一个瞬时频率 ω ($f=\omega/2\pi$),滤波器长度设置为 $p_k=\frac{h_k-1}{2}$ 。对比图 2、图 3 可以看到,WMVLSE 可以很好地获取时频分布,但是在频率变化最大处,即时刻 $n=250$ 处不是很理想。

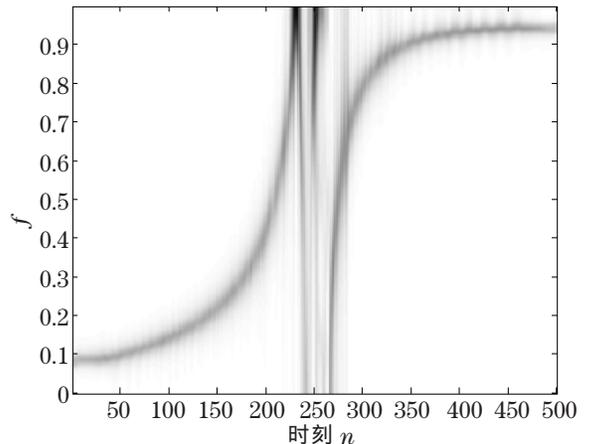


图 3 用 WMVLSE 法得到的时频分布

Fig.3 Time-Frequency distribution obtained by WMVLSE

为了比较,用上述同样的数据、同样的设置给出了文献[3]所提出的时频分布(此处记为 WMVSE-ICI),如图 4 所示。同时,还给出了具有自适应窗口尺寸的周期图法获得的时频分布(记为 Periodogram),如图 5 所示。

比较图 3、图 4、图 5 可以看出,WMVLSE、WMVSE-ICI 和 Periodogram 三种方法都可以分析非平稳信号,但 WMVLSE 在时频分布上稍微清晰一些,Periodogram 在中间位置 $n=250$ 附近几乎看不到时频点,因此认为 WMVLSE 的时频分布性能最好。值得一提的是,WMVLSE 还可以在线实现,具体方法参考文献[3]。

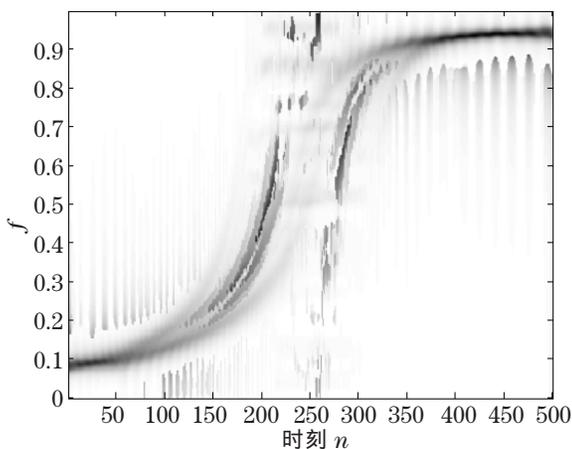


图 4 由 WMVSE-ICI 得到的时频分布

Fig.4 Time-Frequency distribution obtained by WMVSE-ICI

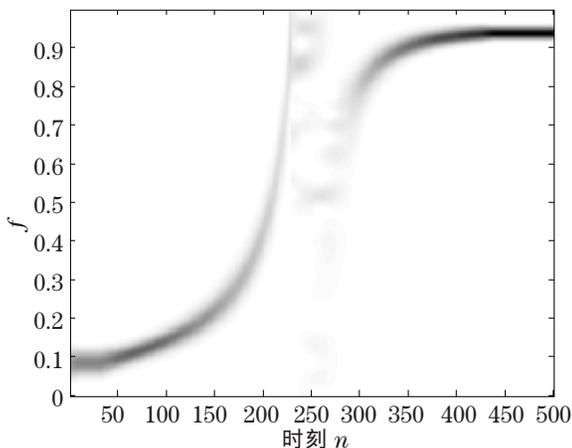


图 5 自适应窗口周期图法的时频分布

Fig.5 Time-frequency distribution obtained by Periodogram with adaptive window

图 6 为由最小主瓣宽度获得的最佳窗口尺寸,可以看到频率变化较大时使用较小的窗口长度,而频率变化较小时使用较大的窗口长度。同时还可以看到 $n=250$ 时难以获得窗口尺寸。

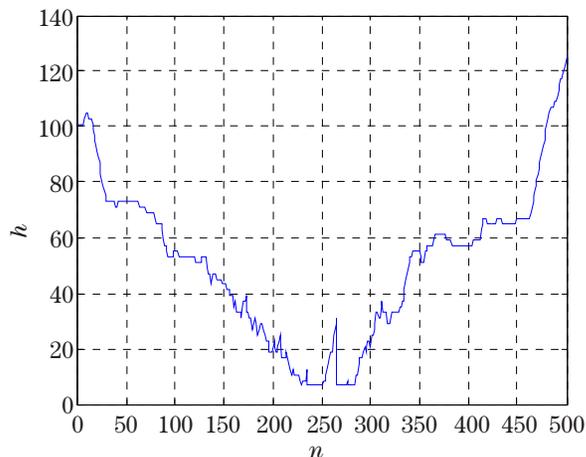


图 6 最佳的窗口尺寸

Fig.6 Best window size

5 结 论

本文在算法 WMVSE 的基础上,针对非平稳时间序列,基于最小方差谱估计提出自适应的时频分析方法,所叠加的时间窗能够自适应地调整尺寸,使得所估计的谱具有最陡的瞬时主瓣、最小的主瓣宽度以适应时频分析,从而获得满意的非平稳信号的时频分布。仿真和比较表明,该方法与基于 MVSE-ICI、基于周期图的 MVSE 相比,能够提供最好的频率分辨率,时频分布性能最好。

参 考 文 献

- [1] Proakis J, Rader C, Ling F, Nikias C, Moonen M, Prouder I. Algorithms for Statistical Signal Processing[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [2] Özgen M T. Extension of the Capon's spectral estimator to time-frequency analysis and to the analysis of polynomial-phase signals[J]. Signal Processing, 2003, **83**(3): 575-592.
- [3] Chan S C, Zhang Z G, Tsui K M. Minimum Variance Spectral Estimation-Based Time Frequency Analysis for Nonstationary Time-Series. Circuits and Systems, 2007[A]. IS-CAS 2007. IEEE International Symposium on[C]. 2007: 1815-1818.
- [4] Kay S M. Modern Spectral Estimation: Theory and Application[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.
- [5] Zhang Z G, Lau W Y, Chan S C. A new Kalman filter-based power spectral density estimation for nonstationary pressure signals[A]. Proc. 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems[C]. Kos, Greece, 21-24 May 2006, 1619-1622.
- [6] 焦人杰, 侯丽敏. 一种快速自适应的噪声谱估计方法[J]. 声学技术, 2007, **26**(4): 735-740.
- [7] Capon J. High Resolution Frequency- Wavenumber spectrum Analysis[J]. Proc. IEEE, 1969, **57**(10): 1408-1418.
- [8] Lacoss R T. Data Adaptive Spectral Analysis Methods[J]. Geophysics, 1971, **36**: 661-675.