基于 SOC 规划的稳健盲波束形成算法

陈模江，马晓川，郝程鹏
(中国科学院声学研究所，北京 100190)

摘要：通过限制估计的方向向量与真实的方向向量之间的误差范数的边界，提出了一种基于二阶锥(Second Order Cone, SOC)规划的稳健四阶累积量盲自适应波束形成算法。该算法相较于采用传统对角加载技术的高阶累积量盲波束形成算法和 WCPO-RCUM 算法而言，进一步提高了稳健性和输出信干噪比。计算机仿真实验表明，该算法具有很好的稳健性。

关键词：稳健自适应波束形成；高阶累积量；盲波束形成
中图分类号：TB556 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-3630(2009)-06-0787-04
DOI 编码：10.3969/j.issn1000-3630.2009.06.020

Robust 4th-order cumulant blind beamforming by using second order cone program

CHEN Mo-jiang, MA Xiao-chuan, HAO Cheng-peng
(*Institute of Acoustics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100190, *China*)

Abstract: By imposing a bound on the error between the estimated signal steering vector and the actual signal steering vector, a new robust 4th order adaptive cumulant beamformer is presented. The second order cone program is used to get the weight vector. The proposed algorithm achieves better robustness and higher output SINR than the previous one using conventional diagonal loading method and WCPO-RCUM. Excellent performance is demonstrated via simulations.

Key words: robust adaptive beamforming; high order cumulant; blind beamforming

1 引 言

随着理论数学的发展，高阶统计被广泛应用于不同的领域[1-3]。基于高阶累积量盲波束形成算法的核心思想是利用信号与干扰的高斯特性的区别，估计出期望信号的方向向量，并在此基础上进行自适应波束形成。众所周知，自适应波束形成算法对期望信号的波达方向及阵列流行矢量非常敏感，当估计的期望信号的方向向量与实际信号的方向向量有少许误差时，波束形成器的性能就将严重劣化[4]，因此需要采用稳健自适应波束形成技术。

最近二十年来，稳健自适应波束形成技术发展很快，已经提出了很多方法来改进自适应波束形成的稳健性[5-7]。其中常用的为对角加载技术[6]，能够根据方向向量的不确定性来确定对角加载因子。文献[2]把文献[8]中的稳健波束形成算法推广应用到高阶累积量盲波束形成算法，提出了一种改进的稳健性四阶累积量盲波束形成算法 WCPO-RCUM，其本质上是双加载因子对角加载算法，优于传统对角加载因子算法，但是该算法的两个对角加载因子与方向向量的不确定性之间没有明显关系。同样基于最差性能最佳化准则，文献[5]提出了一种能够根据信号的方向向量失配程度来调整波束形成加权矢量的稳健自适应波束形成算法，能够提高任意信号方向向量失配和小采样快拍情况下的波束形成器的稳健性。本文将该稳健性波束形成算法推广到高阶累积量波束形成算法，提出了一种基于二阶锥规划(Second-Order Cone Program, SOCP)的稳健四阶累积量盲波束形成算法 SOCP-RCUM。计算机仿真实验表明，在小采样快怕时，该算法的稳健性和输出信干噪比文献[2]中的 WCPO-RCUM 和传统对角加载技术的四阶累积量盲波束形成算法均有所改善。

收稿日期：2008-11-12；**修回日期**：2009-02-26
基金项目：国防基础科研基金(A1320070067)，国家自然科学基金资助项目(60802072)
作者简介：陈模江(1979-)，男，博士研究生，研究方向为阵列信号处理。
通讯作者：陈模江，E-mail: chenmojiang@gmail.com

2 传统对角加载稳健自适应波束形成算法

阵列接收数据(采样快怕)矢量表示为：

$$\boldsymbol{x}(k)=s(k)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{i}(k)+\boldsymbol{n}(k) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{i}(k)$、$\boldsymbol{n}(k)$ 分别为干扰信号和噪声信号。$s(k)$ 为信号波形，$\boldsymbol{a}$ 为信号方向向量。

根据最大信干噪比准则(SINR)可以获得波束形成器加权矢量[6]：

$$\boldsymbol{w}_{\text{opt}}=\alpha\boldsymbol{R}_{i+n}^{-1}\boldsymbol{a} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{R}_{i+n}$ 为干扰加噪声协方差矩阵，α 为归一化常数，不影响输出的 SINR。式(2)表示的最佳加权矢量通常称为最小方差无畸变响应(MVDR)波束形成器。在实际应用中，干扰加噪声的协方差矩阵很难得到。因此，使用式(3)所示的采样快拍矩阵代替 $\boldsymbol{R}_{i+n}$(称为 SMI 算法)。

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^{\text{H}}(n) \tag{3}$$

其中N为采样快怕数。

很多改进型算法能够在方向向量失配和小采样快怕数情况下提供稳健性，改善波束形成器的性能。其中最流行的是对角加载 SMI 算法(LSMI)，其本质是使用对角加载协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}_{\text{dl}}$ 代替传统的采样快怕协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}$。

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\text{dl}}=\varepsilon\boldsymbol{I}+\hat{\boldsymbol{R}} \tag{4}$$

其中，ε 为对角加载因子，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

LSMI 算法的主要问题是如何选择对角加载因子 ε。实际中使用 LSMI 算法时，常常使用经验法。另外，LSMI 算法只是部分地改善了波束形成器的稳健性，仅仅改善了由采样相关矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 与真实的阵列相关矩阵之间的误差所引起的波束形成器性能损失。而期望信号方向向量误差所引起的性能下降依然存在。

3 基于 SOCP 的稳健性波束形成算法

近年来，针对方向向量的不确定程度，提出了多种新的算法[5,8-10]，通过各种优化方法或求解手段把加权矢量与方向向量的失配程度合理地联系起来。

在实际应用中，假设方向向量失配矢量为 $\boldsymbol{\Delta}$，其范数有界[5]，即 $\|\boldsymbol{\Delta}\|\leq\varepsilon$, $\varepsilon\geq 0$。那么，信号的实际方向向量属于如下集合：

$$\boldsymbol{A}(\varepsilon)=\{\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e},\|\boldsymbol{e}\|\leq\varepsilon\} \tag{5}$$

对属于 $\boldsymbol{A}(\varepsilon)$ 的任意向量施加约束，使其相应的阵列响应的绝对值不小于 1，如式(6)所示。

$$|\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{c}|\geq 1,\ \boldsymbol{c}\in\boldsymbol{A}(\varepsilon) \tag{6}$$

根据式(6)，稳健自适应波束形成可以表示为式(7)的约束优化问题。

$$\min_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}^{\text{H}}\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{w}\ \text{s.t.}|\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{c}|\geq 1,\ \boldsymbol{c}\in\boldsymbol{A}(\varepsilon) \tag{7}$$

式(7)为一个半无穷非凸二次规划问题，而非凸二次约束二次规划问题为 NP-hard 问题，难以求解。由于目标函数和约束的特殊结构，式(7)可以改写为如下的简单问题[5]：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}^{\text{H}}\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{w}\ \ \text{s.t.}|\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{a}|\geq\varepsilon\|\boldsymbol{w}\|+1\\&\qquad\text{Im}\{\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{a}\}=0\end{aligned} \tag{8}$$

下面将式(8)改写为二阶锥规划问题求解。

首先，把目标函数转化为线性。对 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 进行 Cholesky 分解，得：$\hat{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{U}^{\text{H}}\boldsymbol{U}$，因此目标函数可以改写为：

$$\boldsymbol{w}^{\text{H}}\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{w}\|^2 \tag{9}$$

则最小化 $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{w}\|$ 等价于最小化式(9)。引入一个非负标量τ和一个新约束 $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{w}\|\leq\tau$，则式(9)可以转化为如下问题：

$$\begin{aligned}&\min_{\tau,\boldsymbol{w}}\tau\ \ \text{s.t.}\ \|\boldsymbol{U}\boldsymbol{w}\|\geq\tau\\&\qquad\varepsilon\|\boldsymbol{w}\|\leq\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{a}-1\\&\qquad\text{Im}\{\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{a}\}=0\end{aligned} \tag{10}$$

式(10)可以表示为如下的标准 SOC 规划问题，直接利用 SeDuMi 软件包求解。

$$\min\boldsymbol{b}^{\text{T}}\boldsymbol{y}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{A}^{\text{T}}\in\text{SOC}_1^{2M+1}\times\text{SOC}_2^{2M+1}\times\text{SOC}_1^{l+1} \tag{11}$$

该标准规划问题可用加权向量按式(12)组成：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}=&[y(2),\cdots y(M+1)]^{\text{T}}+\\&\text{j}[y(M+2),\cdots,y(2M+1)]^{\text{T}}\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)即为基于 SOCP 获得的稳健自适应波束形成器加权矢量。

4 推广的四阶累积量盲波束形成算法

假设期望信号为非高斯信号，干扰为高斯信号，则阵列接收数据向量的四阶累积量为：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{C}_{4m}=cum\{x_1(k),x_1^*(k),x_1^*(k),x_m(k)\}\\&\qquad m=1,2,\cdots,M\end{aligned} \tag{13}$$

由于期望信号为非高斯信号，干扰和噪声均为高斯信号，根据高阶累积量的性质，可得：

$$\boldsymbol{C}_{4m}=|a_1(\theta_{\text{s}})|^2a_1^{\text{H}}(\theta_{\text{s}})r_{4,\text{d}}\boldsymbol{a}_m(\theta_{\text{s}})=\beta\boldsymbol{a}_m(\theta_{\text{s}}) \tag{14}$$

其中：$\beta=\left|a_1^{\text{H}}(\theta_{\text{s}})r_{4,\text{d}}\right|^2$，$r_{4,d}$ 为期望信号的四阶累积量，令 $\boldsymbol{C}_4=[C_{41},C_{42},\cdots,C_{4M}]^{\text{T}}$，则有：

$$\boldsymbol{C}_4=\beta\boldsymbol{a}(\theta_{\text{s}}) \tag{15}$$

式(15)表明，$\boldsymbol{C}_4$ 是期望信号方向矢量的一种复制形式，两者只相差一标量因子 β，因此可以将 $\boldsymbol{C}_4$ 看作是期望信号方向矢量的估计值。利用高阶累积量方法，根据阵列接收数据估计出期望信号的方向矢量之后，便可以利用该估计值作为信号的假设方向向量，进行各种稳健自适应波束形成。

在采用四阶累积量方法估计出方向向量 $\boldsymbol{C}_4$ 后，

将其带入式(10)中(替换 $\boldsymbol{a}$)，使用第 3 节介绍的基于 SOC 规划求解，即可得到本文提出的稳健波束形成器，运算量为 $\mathrm{O}(M)^3$ 。

5　仿真实验

为进行比较，仿真实验的条件与文献[2]提出的 WCPO-RCUM 方法相同。假设均匀线阵阵元数 $M=10$，阵元间距 $d=\lambda/2$，其中 λ 为期望信号载波波长；期望信号为一个窄带 BPSK 信号(波特率为 100baud，载波频率为 1000Hz，采样频率为 500Hz)，从远场入射，入射方向为 20º，*SNR*=10dB；一个高斯干扰信号，入射方向为40 º，*INR*=12dB；白噪声功率谱密度为 1。方向向量失配范数边界参数 ε 取 2。文献[2]中算法对应的传统加载系数 γ 和新加载系数 ε 分别取 5dB 和 2dB。

仿真实验 1：波束图验证。如图 1~4 所示，四幅图(采样快拍数均为 1000)中实线均为理想最佳波束形成器的波束图，虚线分别为原始四阶累积量盲波束形成算法(CUM)输出的波束图、采用传统对角线加载技术的鲁棒四阶累积量盲波束形成算法(RCUM)输出的波束图、WCPO-RCUM 输出的波束图及本文提出的 SOCP-RCUM 算法输出的波束图。可以看出，原始四阶累积量盲波束形成算法性能最差，其波束图与理想波束图相差甚远，这也表明了 MVDR 波束形成器对阵列方向矢量误差极其敏感，很小的误差即能引起性能恶化；而采用传统对角线加载技术鲁棒性方法和基于边界误差性能最优差准则鲁棒性方法的四阶累积量盲波束形成算法的性能均大大改善，其波束图与理想波束图基本吻合。比较图 3 及图 4 可以看出，SOCP-RCUM 算法输出的波束图旁瓣与最佳波束图吻合程度比 WCPO-RCUM 要好，旁瓣幅度低、零陷深。

仿真实验 2：输出 *SINR* 性能曲线比较。如图 5 所示，由上而下分别为：理想最佳波束形成器输出、SOCP-RCUM 输出、WCPO-RCUM 输出、传统对角线加载技术的鲁棒四阶累积量盲波束形成器输出的 SINR。图中曲线点值均由 200 次单独仿真取平均值后计算出的。由图 5 可以看出，原始四阶累积量盲波束形成器性能最差，其 *SINR* 曲线距理想值最远；而本文提出的采用二阶锥规划求解的稳健四阶盲累积量盲波束形成算法最佳。在小快拍数时明显优于 WCPO-RCUM。快拍数大时，性能与其接近。随着采样快拍数的增大，三种鲁棒性算法性能都将接近于理想值。

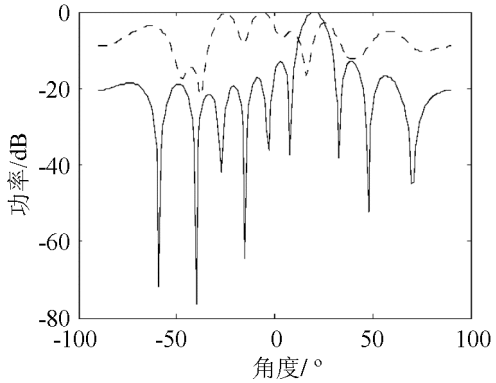

图 1　原始四阶累积量盲波束形成波束图(虚线)

Fig.1　Beam patterns of basic 4th CUM

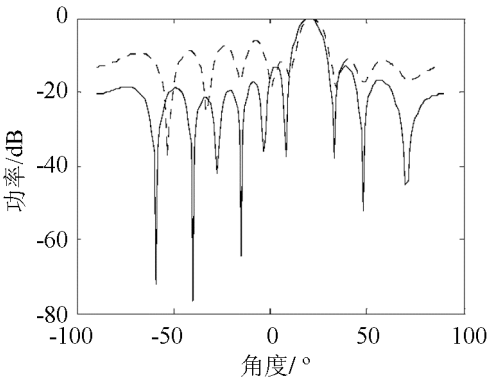

图 2　DLCUM 波束图(虚线)

Fig.2　Beam patterns of Diagonal Loading CUM

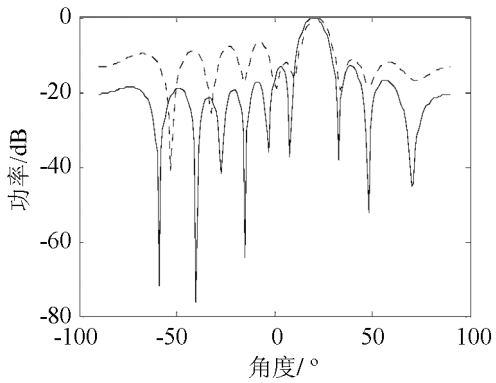

图 3　WCPO-RCUM 波束图(虚线)

Fig.3　Beam patterns of WCPO-RCUM

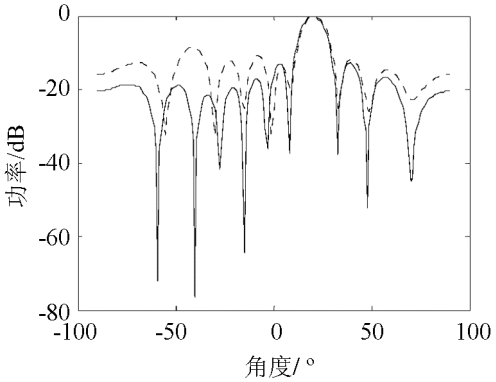

图 4　SOCP-RCUM 波束图(虚线)

Fig.4　Beam patterns of SOCP-RCUM

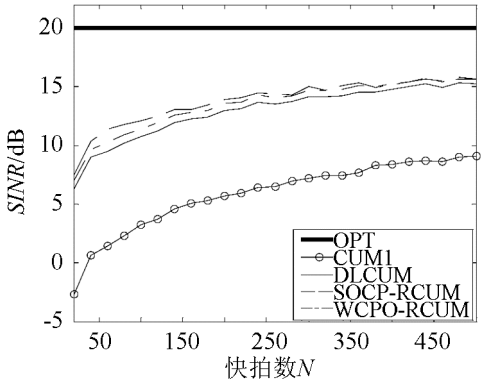

图 5 SINR 性能曲线比较图

Fig.5 Mean output SINR for varying *N*

6 结束语

盲波束形成算法具有不需波达方向、干扰和噪声的空间自相关矩阵等先验知识的优点，而基于四阶累积量的盲波束形成算法由于其良好的非高斯信号提取特性而受到广泛关注。本文结合基于最差性能最佳化准测的稳健性波束形成技术，提出了一种基于 SOC 规划的稳健四阶累积量盲波束形成算法，并通过计算机仿真进行了验证，该算法的输出信干噪比及稳健性，在小快拍时优于文献[2]提出的 WCPO-RCUM 及传统对角加载法。

参 考 文 献

[1] Mendel J M. Tutorial on higher-order statidtices (spectra) in signal processing and system theory: theoretical results and some applications[J]. Processing of the IEEE, 1991, 7**9**(3): 278-305.

[2] 齐赛，杨树元. 基于 WCPO 准则的鲁棒四阶累积量盲波束形成算法[J]. 信号处理, 2005, **21**(4A): 81-85.
QI Sai, YANG Shuyuan. A new 4-Order cumulant blind beamforming based on WCPO[J]. Signal Processing, 2005, **21**(4A): 81-85.

[3] 沈怡平，侯朝焕. 一种基于累计量的 ESPRIT 型盲波束形成算法[J]. 声学技术, 2007, **26**(3): 467-471.
SHEN Yiping, HOU Zhaohuan. Cumulant-based ESPRIT-like blind beamforming[J]. Technical Acoustics, 2007, **26**(3): 467-471.

[4] Feldman D D, Griffiths L J. A projection approach to robust adaptive beamforming[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1994, **42**(4): 867-876.

[5] Vorobyov S A, Gershman A B, LUO Zhiquan. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: A solution to the signal mismatch problem[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2003, **51**(2): 313-324.

[6] Harry L, Van Trees. Detection, Estimation, and Modulation theory, Part IV, Optimum array processing[M]. New York: Wiley, 2002

[7] 陈模江，马晓川. 基于 TIDSPs 的稳健自适应波束形成系统的设计[J]. 信号处理, 2007, **23**(4A): 57-60.
CHEN Mojiang, MA Xiaochuan. Design of a robust adaptive beamforming system using TI DSPs[J]. Signal Processing, 2007, **23**(4A): 57-60.

[8] Shahram Shahbazpanahi, Gershman A B, LUO Zhiquan, Kon Max Wong. Robust adaptive beamforming for general-rank signal models using worst-case performance optimization[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2003, **51**(9): 13-17.

[9] 张小飞，徐大专. 基于斜投影的波束形成算法[J]. 电子与信息学报, 2008, **30**(3): 585-588.
ZHANG Xiaofei, XU Dazhuan. Oblique projection-based beamforming algorithm[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2008, **30**(3): 585-588.

[10] LI Jian, Petre Stoica, WANG Zhisong. On robust Capon beamforming and diagonal loading[J]. IEEE Transactions Signal Processing, 2003, **51**(7): 1702-1715.