

径向极化压电陶瓷管的径向振动研究

王帅军, 林书玉

(陕西师范大学应用声学研究所, 西安 710062)

摘要: 结合平面应变和三维压电弹性力学理论, 对径向极化厚壁压电陶瓷细长管的径向振动进行了研究, 得出位移函数、电势函数的精确解。利用振子静电电荷方程导出电位移及电场强度函数, 解决了电压与电场强度非线性关系问题, 进而辅助 maple 软件首次对厚壁管形振子等效电导纳进行研究, 推出了精确的谐振反谐振频率方程。利用数值法得出了不同尺寸管形振子的谐振反谐振频率, 并通过有限元分析, 结果表明了本文理论的准确性与精确性, 为压电陶瓷厚壁振子的理论研究及设计提供了依据。

关键词: 径向极化; 厚壁理论; 径向振动

中图分类号: TN384

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2011)-02-0206-05

DOI 编码: 10.3969/j.issn1000-3630.2011.02.020

Research on the radial vibration of piezoelectric hollow cylinder with radial polarization

WANG Shuai-jun, LIN Shu-yu

(Institute of Applied Acoustics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: Combined with piezoelectric plane strain and three-dimensional piezoelectricity theory, the vibration characteristics of a piezoelectric ceramic thick hollow cylinder with radial polarization has been studied, and closed-type solutions are obtained for the mechanical radial displacement and electric potential. The electric displacement and electric field strength are derived from the charge equation of electrostatics (Gauss), which solves the problems of nonlinear relationship between voltage and electric field strength. Based on maple software, the equivalent admittance of the thick hollow cylinder is studied for the first time, and corresponding exact resonance and anti-resonance frequency equations are also obtained. By means of numerical method, the resonance and anti-resonance frequencies of different size tubular oscillators are calculated. Accuracy and precision of this theory are verified by finite element analysis. All these provide the basis for theoretical research and design of the piezoelectric ceramic thick oscillators.

Key words: radial polarization; thick wall theory; radial vibration

0 引言

压电陶瓷振子的应用日益广泛, 是超声换能器、压电陶瓷滤波器、压电传感器、压电谐振器以及压电陶瓷变压器的主要组成部分。压电陶瓷圆管是常用的声学换能单元, 其结构简单, 性能稳定, 布阵方便, 沿半径方向有均匀的指向性和较高的灵敏度, 因此多用于水声、地质、石油勘探等领域^[1-3]。振子的振动特性直接影响到换能器的动态性能, 对其振动模式的研究是设计该类换能器的基础, 因此, 此项工作有重要的理论与实际意义。圆管形振子分为轴向、切向、径向极化三种类型, 轴向、切

向极化振子激励电极与极化电极不同, 且轴向极化振子的极化及激励电压比径向极化高得多, 工程上几乎没有应用, 径向极化、径向激励的振子, 极化电极和激励电极可以合二为一, 极化及激励电压也较低, 在制作工艺上更有优势^[4], 实际应用也较多。

关于径向极化管形振子的径向振动模式, 前人的研究多采用薄膜或者薄壳理论^[5], 薄膜理论在运动方程中忽略了剪应力和径向正应力, 薄壳理论保留剪应力, 且上述理论只适用于特殊尺寸振子, 如薄壁、以及纵向和径向尺寸比厚度大多个数量级的理想情形, 从而给应用带来不便。前人也曾对厚壁振子的径向振动模式进行研究, 但都采用了不同的近似, 如把压电陶瓷看做各向同性材料^[6], 运算过程中取级数截断近似^[7], 本文从径向极化压电陶瓷厚壁细长管振子的压电和运动方程出发, 结合振子静电电荷方程, 对其径向振动进行研究, 得到电导

收稿日期: 2010-04-10; 修回日期: 2010-08-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10974127)

作者简介: 王帅军(1985-), 女, 河南长葛人, 硕士研究生, 研究方向超声工程。

通讯作者: 林书玉, E-mail: wangjunjun@stu.snnu.edu.cn

纳表达式, 推出振子的共振和反共振频率方程, 利用 ANSYS 有限元软件进行模态分析, 结果表明, 理论计算结果与有限元模拟结果吻合很好。

1 厚壁细长管振子径向振动精确理论

1.1 基本方程

图1所示为一压电陶瓷厚壁细长管, 为方便研究, 本文采用柱坐标系, 并取 θ -1、 z -2、 r -3 的顺序, $2L$ 为振子长度, a 为振子内半径, b 为振子外半径, 细长管在 z 方向上无限长, 因此压电振子作轴对称振动。

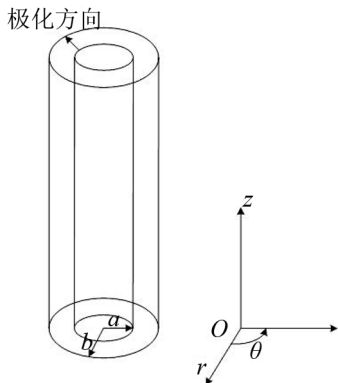


图1 径向极化压电陶瓷细长管几何示意图
Fig.1 Geometry of piezoelectric hollow cylinder with radial polarization

图中振子极化方向和激励方向均沿半径方向, 即 r 方向, 经径向极化处理的压电陶瓷在垂直于极化方向上是各向同性材料(在 θz 方向各向同性), 柱坐标下细长管轴对称振动的 e 型压电方程^[8-11]如下:

$$T_\theta = c_{11}^E S_\theta + c_{13}^E S_r - e_{31} E_r \quad (1a)$$

$$T_z = c_{12}^E S_\theta + c_{23}^E S_r - e_{32} E_r \quad (1b)$$

$$T_r = c_{13}^E S_\theta + c_{33}^E S_r - e_{33} E_r \quad (1c)$$

$$D_r = e_{31} S_\theta + e_{33} S_r + \epsilon_{33}^S E_r \quad (1d)$$

细长管做轴对称振动的运动方程为^[11]:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{T_r - T_\theta}{r} \quad (2)$$

由于细长管的振动关于 z 轴对称, 各位移及电场分量满足: $\xi_z = \xi_z(r, z, t)$, $\xi_r = \xi_r(r, z, t)$, $\xi_\theta = 0$, $E_r = E_r(r, z, t)$; 细长管很长, 因此对细长管的研究属于平面应变问题, 位移及电场分量仅存在于 $or\theta$ 平面, 即 $\xi_z = \xi_z = 0$, $\xi_r = \xi_r(r, t)$, $E_r = E_r(r, t)$, 综上所述, 该模型满足的几何方程为:

$$S_r = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \quad (3a)$$

$$S_\theta = \frac{\xi_r}{r} \quad (3b)$$

在方程组(1)、(2)、(3)中, T 为应力, S 为应变, ξ 为位移, E 为电场强度, D 为电位移矢量, ρ 为材料密度, c_{ij}^E 、 e_{ij} 、 ϵ_{ij}^S 为别为压电陶瓷材料的弹性刚度常数、压电常数、介电常数。

由于压电陶瓷内部不存在自由移动电荷^[3], 其静电电荷方程用柱坐标表示为:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) = 0 \quad (4)$$

解此微分方程得:

$$D_r = \frac{D_0}{r} e^{i\omega t} \quad (5)$$

式中, D_0 为电位移常量, 由边界条件确定。

1.2 机械振动特性

压电陶瓷振子在使用中多为简谐激励, 其电场及稳态位移分布关于时间均服从简谐变化规律, 因此有:

$$\xi_r = \xi_{r0} e^{i\omega t} \quad (6)$$

$$E_r = E_{r0} e^{i\omega t} \quad (7)$$

将式(5)代入式(1d), 忽略时间项得:

$$E_{r0} = F_1 S_\theta + F_2 S_r + \frac{D_0}{\epsilon_{33}^S r} \quad (8)$$

式中, $F_1 = -\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}^S}$, $F_2 = -\frac{e_{33}}{\epsilon_{33}^S}$ 。

将式(8)分别代入式(1a)、(1c), 得:

$$T_\theta = c_1 S_\theta + c_2 S_r + F_1 \frac{D_0}{r} \quad (9a)$$

$$T_r = c_2 S_\theta + c_3 S_r + F_2 \frac{D_0}{r} \quad (9b)$$

式中, $c_1 = c_{11}^E + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^S}$, $c_2 = c_{13}^E + \frac{e_{31} e_{33}}{\epsilon_{33}^S}$, $c_3 = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S}$ 。

将式(3)、(9)代入式(2), 简化为只含位移的微分方程:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = c_3 \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} - v^2 \frac{\xi_r}{r^2} - F_1' \frac{D_0}{r^2} \right) \quad (10)$$

式中, $v^2 = c_1 / c_3$, $F_1' = F_1 / c_3$ 。

由式(6)可分离时间变量, 重写运动方程为:

$$\frac{d^2 \xi_{r0}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \xi_{r0}}{dr} + \left(k^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) \xi_{r0} - F_1' \frac{D_0}{r^2} = 0 \quad (11)$$

式中, $V_3^2 = c_3 / \rho$, $k = \omega / V_3$, k 为细长管径向振动等效波数, V_3 为径向振动在细长管中传播的速度。

解上述微分方程, 得细长管振子位移函数为:

$$\xi_{r0} = C_1 J_\nu(kr) + C_2 Y_\nu(kr) + F_1' D_0 s_{-1,\nu}(kr) \quad (12)$$

式中: $J_\nu(x)$ 和 $Y_\nu(x)$ 分别为第一类和第二类 ν 阶 Bessel 函数; $s_{\mu,\nu}(x)$ 为第一类 Lommel 函数; C_1 、 C_2 为待定常数, 由边界条件确定。在此为了方便表示, 本文下述各量均表示幅值, 与时间无关。

由式(7)看出, 径向极化厚壁细长管电场强度沿径向分布不均匀, 将式(7)代入下式并积分, 得:

$$\begin{aligned} V_{r0} = & -\int E_{r0} dr = -C_1 \left[\int \frac{F_1 J_v(kr)}{r} dr + F_2 J_v(kr) \right] - \\ & C_2 \left[\int \frac{F_1 Y_v(kr)}{r} dr + F_2 Y_v(kr) \right] - D_0 \left[\int \frac{F_1' F_{1-v}(kr)}{r} dr + \right. \\ & \left. F_1' F_{2-v}(kr) + \frac{\ln r}{\epsilon_{33}^S} \right] + C_3 \end{aligned}$$

式中 C_3 为常数, 由边界条件确定。

由式(3)、(9)、(12)可得:

$$\begin{aligned} T_r = & C_1 \left[\frac{c_2 J_v(kr)}{r} + c_3 J_v'(kr) \right] + C_2 \left[\frac{c_2 Y_v(kr)}{r} + c_3 Y_v'(kr) \right] + \\ & D_0 \left\{ F_1' \left[\frac{c_2 s_{-1,v}(kr)}{r} + c_3 s_{-1,v}'(kr) \right] + \frac{F_2}{r} \right\} \end{aligned}$$

若细长管振子在机械自由边界条件下径向振动, 其力边界满足 $T_a = T_r|_{r=a} = 0$, $T_b = T_r|_{r=b} = 0$; 电边界满足 $V_a = V_r|_{r=a} = 0$, $V_b = V_r|_{r=b} = V_0$, 即

$$C_1 J_a' + C_2 Y_a' + D_0 s_a' = 0 \quad (13a)$$

$$C_1 J_b' + C_2 Y_b' + D_0 s_b' = 0 \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} -C_1 [F_1 J_a + F_2 J_v(ka)] - C_2 [F_1 Y_a + F_2 Y_v(ka)] - \\ D_0 [F_1' F_{1-s}(ka) + F_1' F_{2-s}(ka) + \frac{\ln a}{\epsilon_{33}^S}] + C_3 = 0 \end{aligned} \quad (13c)$$

$$\begin{aligned} -C_1 [F_1 J_b + F_2 J_v(kb)] - C_2 [F_1 Y_b + F_2 Y_v(kb)] - \\ D_0 [F_1' F_{1-s}(kb) + F_1' F_{2-s}(kb) + \frac{\ln b}{\epsilon_{33}^S}] + C_3 = V_0 \end{aligned} \quad (13d)$$

式中: $J_r = \int \frac{J_v(kr)}{r} dr$, $Y_r = \int \frac{Y_v(kr)}{r} dr$;

$$s_r = \int \frac{s_{-1,v}(kr)}{r} dr, \quad J_r' = \frac{c_2 J_v(kr)}{r} + c_3 J_v'(kr);$$

$$Y_r' = \frac{c_2 Y_v(kr)}{r} + c_3 Y_v'(kr);$$

$$s_r' = F_1' \left[\frac{c_2 s_{-1,v}(kr)}{r} + c_3 s_{-1,v}'(kr) \right] + \frac{F_2}{r}$$

计算中利用以下积分、微分关系^[12]:

$$\int \frac{J_v(kr)}{r} dr = kr(v-2)J_v(kr)s_{-2,v-1}(kr) - krJ_{v-1}(kr)s_{-1,v}(kr);$$

$$\int \frac{Y_v(kr)}{r} dr = kr(v-2)Y_v(kr)s_{-2,v-1}(kr) - krY_{v-1}(kr)s_{-1,v}(kr);$$

$$\begin{aligned} \int \frac{s_{-1,v}(kr)}{r} dr = \\ -\frac{\ln(x)}{v^2} + \frac{k^2 r^2 {}_2F_3([1, 1], [2, 2 + \frac{1}{2}v, 2 - \frac{1}{2}v], -\frac{k^2 r^2}{4})}{2v^2(4-v^2)} \end{aligned}$$

$$J_v'(x) = -\frac{v}{x} J_v(x) + J_{v-1}(x);$$

$$Y_v'(x) = -\frac{v}{x} Y_v(x) + Y_{v-1}(x);$$

$$s_{\mu,v}'(x) = -\frac{v}{x} s_{\mu,v}(x) + (\mu+v-1)s_{\mu-1,v-1}(x)$$

其中, ${}_mF_n([\alpha_1 \cdots \alpha_m], [\rho_1 \cdots \rho_n], x)$ 为超几何函数^[12]。

消去式(13)中 C_3 可得:

$$\begin{pmatrix} J_a' & Y_a' & s_a' \\ J_b' & Y_b' & s_b' \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ D_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

式中: $A_1 = F_1(J_a - J_b) + F_2(J_v(ka) - J_v(kb))$;

$$A_2 = F_1(Y_a - Y_b) + F_2(Y_v(ka) - Y_v(kb));$$

$$A_3 = F_1' F_{1-s}(s_a - s_b) + F_1' F_{2-s}(s_{-1,v}(ka) - s_{-1,v}(kb)) + \frac{1}{\epsilon_{33}^S} \ln \frac{a}{b}$$

解方程组(14)可得:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{V_0}{\Delta} (Y_b' s_a' - Y_a' s_b') \\ C_2 = \frac{V_0}{\Delta} (J_b' s_a' - J_a' s_b') \\ D_0 = \frac{V_0}{\Delta} (J_a' Y_b' - J_b' Y_a') \end{cases} \quad (15)$$

式(15)中 Δ 为式(14)中左边系数矩阵行列式的值, $\Delta=0$ 为细长管径向振动的谐振频率方程。

将式(15)代入式(12), 可得出细长管径向振动位移分布函数

$$\begin{aligned} \xi_{r0} = & \frac{V_0}{\Delta} [(Y_b' s_a' - Y_a' s_b') J_v(kr) + \\ & (J_b' s_a' - J_a' s_b') Y_v(kr) + F_1' (J_a' Y_b' - J_b' Y_a') s_{-1,v}(kr)] \end{aligned} \quad (16)$$

1.3 电振动特性

将式(15)代入式(13a)、(13b), 均可得出 C_3 , 至此求出细长管电势沿径向分布函数。

细长管电流为:

$$I_0 = \frac{dQ}{dt} = j\omega \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} -\frac{D_0}{b} b d\theta dz = -j\omega 4\pi L D_0$$

因此细长管的电导纳为:

$$Y = \frac{I_0}{V_0} = -\frac{j\omega 4\pi L}{\Delta} (J_a' Y_b' - J_b' Y_a') \quad (17)$$

由式(17)可知, 当 $Y \rightarrow \infty$ 时, 得该振子共振频率方程为:

$$\Delta = 0 \quad (18)$$

当 $Y=0$ 时, 该振子处于反共振状态, 得其反共振频率方程为:

$$\omega (J_a' Y_b' - J_b' Y_a') = 0 \quad (19)$$

方程(18)、(19)是含 v 阶一类、 v 阶二类 Bessel 函数和一类 Lommel 函数的复杂超越方程, 只能由数值法得到其解。方程中的相关设计参数有频率 f 及换能器的几何尺寸 a 、 b 。振动系统设计的依据是频率方程, 对于给定材料, 由几何参数可求得系统共振频率, 或从设计频率求出系统的几何尺寸。

2 有限元分析

ANSYS 软件是目前比较流行的大型有限元分析软件之一,它是设计复杂结构形式和复杂激励机理及其耦合作用换能器的有效工具,随着各种各样换能器的广泛使用,有限元更成为换能器设计人员的强有力的助手^[13]。本文用 Ansys10.0 对细长管振子建立有限元模型,单元类型为 plane13 面单元,沿 x 方向定义材料属性,采用 Block-lanczos 法进行模态分析,频率搜索区间为 15.0~40.0 kHz。振子谐振反谐振频率的理论、数值计算结果见表 1 和表 2,表中 f_c 为振子理论计算结果, f_{FEM} 为数值计算结果, k_{eff}^c 为有效机电耦合系数理论计算结果, k_{eff}^{FEM} 为有效机电耦合系数数值计算结果, Δ_f 为谐振反谐振频率相对误差, Δ_k 为有效机电耦合系数相对误差, $\Delta_f = \frac{|f_c - f_{FEM}|}{f_c}$, $\Delta_k = \frac{|k_{eff}^c - k_{eff}^{FEM}|}{k_{eff}^c}$ 。

本文所用材料为 PZT-4,材料相关参数分别为:
 $\rho = 7.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $e_{31} = -5.2 \text{ Nm/V}$;
 $e_{33} = 15.1 \text{ Nm/V}$, $\varepsilon_{33}^s = 5.62 \times 10^{-9} \text{ C/m}$;
 $c_{11}^E = 13.9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $c_{13}^E = 7.43 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$;

$c_{33}^E = 11.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$;

由表 1、2 可以看出,细长管振子径向振动谐振反谐振频率的理论计算值与有限元数值模拟值、有效机电耦合系数的理论计算值与有限元数值模拟值均吻合较好,说明了上述关于细长管径向振动的理论推导方法的合理性。表 1 给出了振子共振反共振频率随厚度的变化规律,由表中数据可知,相同长度相同内径的振子,共振反共振频率随其厚度增大均变小,可明显看出振子 2、3、4 是厚壁振子。由表中计算结果对比可知,该理论适用于厚壁振子,且误差很小;表 2 给出了不同长度振子共振反共振频率的变化规律,由表中数据对比可以看出,在满足本文模型的前提下,相同内外径不同长度的振子,其共振反共振频率变化不大。

3 结 论

本文结合平面应变和三维压电弹性力学理论,对径向极化厚壁压电陶瓷细长管径向振动进行了研究,得出位移函数、电势函数的精确解,首次对厚壁振子等效电导纳进行研究,得出精确的谐振反谐振频率方程,并通过有限元分析验证,以上分析

表 1 不同厚度管形振子理论、有限元计算频率及有效机电耦合系数
Table 1 Frequencies and effective electromechanical coupling coefficients of different thickness tube oscillators from theoretical calculation and finite element analysis

		a/m	b/m	$2L/\text{m}$	f_c/Hz	f_{FEM}/Hz	$\Delta_f/\%$	k_{eff}^c	k_{eff}^{FEM}	$\Delta_k/\%$
1	f_r	0.01	0.02	0.25	39628	39373	0.65	0.457	0.453	1.01
	f_a				44561	44154	0.92			
2	f_r	0.01	0.025	0.25	35567	35494	0.20	0.428	0.434	1.31
	f_a				39366	39404	0.10			
3	f_r	0.01	0.03	0.25	32447	32157	0.89	0.397	0.414	4.03
	f_a				35351	35319	0.09			
4	f_r	0.01	0.035	0.25	29897	29550	1.2	0.367	0.393	7.16
	f_a				32116	32142	0.08			

表 2 不同长度管形振子理论、有限元计算频率及有效机电耦合系数
Table 1 Frequencies and effective electromechanical coupling coefficients of different length tube oscillators from theoretical calculation and finite element analysis

		a/m	b/m	$2L/\text{m}$	f_c/Hz	f_{FEM}/Hz	$\Delta_f/\%$	k_{eff}^c	k_{eff}^{FEM}	$\Delta_k/\%$
1	f_r	0.01	0.03	0.15	32447	32280	0.51	0.397	0.401	1.03
	f_a				35351	35238	0.31			
2	f_r	0.01	0.03	0.2	32447	32338	0.33	0.397	0.402	1.24
	f_a				35351	35316	0.10			
3	f_r	0.01	0.03	0.25	32447	32157	0.89	0.397	0.414	4.03
	f_a				35351	35319	0.09			
4	f_r	0.01	0.03	0.3	32447	32268	0.55	0.397	0.406	2.31
	f_a				35351	35315	0.10			

表明本文采用厚壁理论的准确性与精确性。

总结本文得出以下结论:

(1) 径向极化厚壁细长管的径向振动属于轴对称振动;

(2) 本文在建立模型时将细长管问题简化为平面应变问题, 由表中相对误差项可以看出, 在满足模型要求时壁厚对计算结果基本没有影响, 精确度较薄膜和薄壳理论高;

(3) 在实际使用中, 细长管只需满足 $L \gg b$ 即可, 若不满足, 可能存在一定误差;

(4) 用数值法分析了该振子的共振频率, 结果表明, 利用文中理论得出的共振频率与数值法得出的结果吻合较好。

参 考 文 献

- [1] 李邓化, 夏颂, 张良莹, 姚熹. 1-3 型压电复合材料圆柱形水听器[J]. 功能材料与器件学报, 2001, 7(2): 126-130.
LI Denghua, XIA Song, ZHANG Liangying, YAO Xi. 1-3 piezocomposites tubular hydrophone[J]. Journal of Functional Materials and Devices. 2001, 7(2): 126-130.
- [2] 周光平, 梁召峰, 张亦慧, 张博夫, 杨宏丽. 管形振子的声场特性研究[J]. 声学技术. 2005, 26(5): 499-504.
ZHOU Guangping, LIANG Zhaofeng, ZHANG Yihui, ZHANG Bofu, Yang hongli. The research on sound field characteristics of tubular vibrator based on finite element method[J]. Technical Acoustics, 2005, 26(5): 499-504.
- [3] 滕舵, 陈航, 朱宁. 宽频带径向极化压电圆管水声换能器研究[J]. 压电与声光. 2008, 30(4): 411-413.
TENG Tuo, CHEN Hang, ZHU Ning. Research on the broadband radially polarized piezoelectric Cylindrical tube underwater transducer[J]. Piezoelectrics and Acoustooptics. 2008, 30(4): 411-413.
- [4] LU C F, YANG J S, WANG J, CHEN W Q. Power transmission through a hollow cylinder by acoustic waves and piezoelectric transducers with radial polarization[J]. Journal of Sound and Vibration. 2009, 325(5): 989-999.
- [5] 周心一, 黄建平, 谢可夫. 压电圆管换能器振动特性的薄壳理论分析[J]. 应用声学, 2003, 22(4): 11-15.
ZHOU Xinyi, HUANG Jianping, XIE kefu. Vibration characteristics of piezoelectric cylindrical shell transducers[J]. Applied Acoustics, 2003, 22(4): 11-15.
- [6] Jin O Kim, Kyo Kwang Hwang, Hyung Gon Jeong. Radial vibration characteristics of piezoelectric cylindrical transducers[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 276(5): 1135-1144.
- [7] Jin O Kim, Jung Gu Lee. Dynamic characteristics of piezoelectric cylindrical transducers with radial polarization[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 300(2): 241-249.
- [8] 张沛霖, 张仲渊. 压电测量[M]. 北京: 国防工业出版社. 1983.
ZHANG Peilin, ZHANG Zhongyuan. Piezo-electric measurement [M]. Beijing: National Defense Industry Press. 1983.
- [9] 林书玉. 超声换能器的原理及设计[M]. 北京: 科学出版社. 2004.
LIN Shuyu. Ultrasonic transducer principle and design[M]. Beijing: Science Press. 2004.
- [10] Ding H J, Wang H M, Hou P F. The transient responses of piezoelectric hollow cylinders for axisymmetric plane strain problems[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(1): 105-123.
- [11] LIN Shuyu. Study on the equivalent circuit and coupled vibration for the longitudinally polarized piezoelectric ceramic hollow cylinders[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 275(4): 859-875.
- [12] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series, and Products[M]. London: University of Newcastle upon Tyne, 2007: 926-946, 1005-1022.
- [13] 莫喜平. ANSYS 软件在模拟分析声学换能器中的应用[J]. 声学技术, 2007, 26(6): 1279-1290.
MO Xiping. Simulation and analysis of acoustics transducers using the ANSYS software[J]. Technical acoustics, 2007, 26(6): 1279-1290.