

基于波束空间的改进 TOPS 宽带 DOA 估计

张立文, 许可, 万建伟, 陈 勇

(国防科技大学电子科学学院, 湖南长沙 410072)

摘要: 提出了一种基于波束空间的改进投影子空间正交性测试算法, 以克服投影子空间正交测试(Test of Orthogonality of Projected Subspace, TOPS)算法在低信噪比时容易出现伪峰的缺点。通过对 TOPS 算法中的正交性测试矩阵添加对角修正矩阵, 并利用波束空间方法对阵元接收数据进行预处理, 从而实现宽带信号的波达方向估计。仿真结果表明, 文中所提出算法与 TOPS 算法相比, 能够抑制波束指向范围内的伪峰, 并能提高分辨概率和减少运算量, 是一种具有应用前景的新算法。

关键词: 波达方向估计; 投影子空间正交性测试; 波束空间; 宽带信号

中图分类号: TN911

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2018)-04-0393-05

DOI 编码: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2018.04.017

DOA estimation of wideband signals based on modified TOPS in beamspace domain

ZHANG Li-wen, XU Ke, WAN Jian-wei, CHEN Yong

(National University of Defense Technology, College of Electronic Science, Changsha 410072, Hunan, China)

Abstract: In this paper, a modified TOPS (test of orthogonality of projected subspace) algorithm based on beamspace, named BMTOPS algorithm, is proposed to overcome the shortcoming of TOPS algorithm that the false peak is easy to appear at low signal to noise ratio. A diagonal correction matrix is added to the orthogonality test matrix in the TOPS algorithm, and the beamspace method is applied to preprocessing the received data of the array, so as to achieve the DOA estimation of wideband signal. Simulation results show that compared with TOPS algorithm, BMTOPS algorithm can suppress false peaks in beam direction, improve resolution probability and reduce computation, which would be a new algorithm with application prospect.

Key words: direction-of-arrival (DOA) estimation; Test of Orthogonality of Projected Subspace (TOPS); beamspace; wideband signals

0 引言

阵列信号处理的一个重要研究方向就是波达方向(Direction-Of-Arrival, DOA)估计。传统的 DOA 估计算法都是针对窄带信号, 并且技术比较成熟。但是随着科技的发展, 声呐、雷达、通信等领域所利用的频段越来越宽, 因而宽带信号的 DOA 估计成为当前阵列信号处理的研究重点。

对于宽带信号, 由于不同频点处的导向矢量不同, 导致阵列输出的相位差也有差异, 因而窄带 DOA 估计的方法不能直接运用到宽带 DOA 估计。

当前, 宽带 DOA 估计方法主要分为两类: 一类是非相干信号子空间法(Incoherent Signal-subspace Method, ISM); 另一类是相干信号子空间法(Coherent Signal-subspace Method, CSM)^[1]。ISM 算法是将宽带信号通过离散傅里叶变换分解成多个窄带信号, 对每个窄带信号使用窄带方法处理, 最后把各窄带处理结果加权平均得到最终宽带 DOA 估计结果。由于该方法只是利用各个子带的频段信息而不是宽带信号的全部信息, 因而在低信噪比下的目标分辨率较低。CSM 算法主要利用聚焦矩阵将宽带信号分解成的多个窄带信号变换到某一参考频率上, 从而利用窄带 DOA 估计方法得到宽带 DOA 估计。但是该方法对预估值比较敏感, 聚焦矩阵的构造直接影响最终的估计结果。

文献[2]提出投影子空间正交性测试(Test of Orthogonality of Projected Subspace, TOPS)算法, 该算法的核心是构造一个变换矩阵, 将某一参考频点处的信号子空间变换到任意频点处, 最后判断参考

收稿日期: 2017-07-10; 修回日期: 2017-09-20

基金项目: 国防科技大学基础研究项目(ZDYJCYJ20140701)、国家自然科学基金资助项目(61601209)

作者简介: 张立文(1991-), 男, 安徽蒙城人, 硕士研究生, 研究方向为现代信号处理、阵列信号处理。

通讯作者: 张立文, E-mail: yuanfen8056@163.com

频点处信号子空间与各频点处噪声子空间的投影构成的测试矩阵的缺秩程度得到宽带 DOA 估计。因为在低信噪比时,参考频点处的信号子空间存在误差而影响正交性测试,所以该方法在低信噪比下的目标分辨率仍然较低,且容易出现伪峰。

针对该缺点,本文提出一种改进的 TOPS 算法,通过对正交性测试矩阵添加一个对角修正矩阵来抑制伪峰,并且利用波束空间方法对阵元接收数据进行预处理。仿真实验表明,改进算法能够抑制波束指向范围出现伪峰、提高分辨概率和减少运算量,得到了较好的估计效果。

1 信号模型和 TOPS 算法

1.1 宽带信号模型

本文考虑一个 M 阵元的均匀线列阵(Uniform Line Array, ULA)情况,空间存在 L 个宽带信号源,各信号源之间相互独立,并且每个信号源的带宽不要求相等,但都在频带 $[\omega_L, \omega_H]$ 内。由此可得第 m 阵元的输出 $x_m(t)$ 为

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^L s_i(t - \tau_m) + n_m(t), \quad (m=0, 1, \dots, M-1) \quad (1)$$

其中: $s_i(t)$ 是第 i 个信号源; $n_m(t)$ 是第 m 阵元的噪声;选择第一个阵元作为参考阵元,则第 m 阵元与参考阵元之间的时延为 $\tau_m = md \sin \theta_i / c$, d 为相邻阵元间隔, θ_i 是待估计的 DOA 值, c 为介质中的声速。假定噪声 $n_m(t)$ 为与宽带信号源不相关的零均值高斯白噪声,对式(1)进行离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)可得:

$$X_m(\omega) = \sum_{i=1}^L S_i(\omega) \exp(-j\omega\tau_m) + N_m(\omega) \quad (2)$$

因而,可将各个阵元在频率 ω_k 上的分量写成矩阵形式:

$$\mathbf{X}(\omega_k) = \mathbf{A}(\omega_k, \theta) \mathbf{S}(\omega_k) + \mathbf{N}(\omega_k), \quad k=1, \dots, K \quad (3)$$

其中, $\omega_L < \omega_k < \omega_H$ ($k=1, \dots, K$), K 是宽带信号分解成窄带信号的个数; $\mathbf{A}(\omega_k, \theta)$ 是 $M \times L$ 维的矩阵:

$$\mathbf{A}(\omega_k, \theta) = [\mathbf{a}(\omega_k, \theta_1), \mathbf{a}(\omega_k, \theta_2), \dots, \mathbf{a}(\omega_k, \theta_L)] \quad (4)$$

$$\mathbf{a}(\omega_k, \theta_i) = [1, e^{-j\omega_k \tau_1}, \dots, e^{-j\omega_k \tau_{M-1}}]^T \quad (5)$$

由此可计算出 $M \times M$ 维的协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_x(\omega_k) = \mathbf{E}[\mathbf{X}(\omega_k) \mathbf{X}^H(\omega_k)] \quad (6)$$

通过求解协方差矩阵的特征值和特征向量,可得到各个频点处的信号子空间 \mathbf{F}_k 和噪声子空间 \mathbf{W}_k [12-14]。

1.2 投影子空间正交性测试(TOPS)算法

TOPS 算法的关键在于构造一个与角度和频率

有关的变换矩阵,在不改变信号 DOA 的情况下,利用该矩阵把参考频点处的信号子空间变换到任意频点处^[3]。由文献[2]可知,该变换矩阵的对角元素为:

$$[\Phi(\omega_k, \theta)]_{(m,m)} = \exp(-j\omega_k \tau_m) \quad (7)$$

定义一个 $M \times L$ 维矩阵 $\mathbf{U}(\omega_k, \theta)$:

$$\mathbf{U}(\omega_k, \theta) = \text{diag}(\Phi(\Delta\omega_k, \theta)) \mathbf{F}_0 \quad (8)$$

其中: $\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_0$; \mathbf{F}_0 为在参考频点 ω_0 处得到的参考信号子空间; θ 是可能的方位角。从而构造一个 $L \times K(M-L)$ 维的测试矩阵 $\mathbf{D}(\theta)$:

$$\mathbf{D}(\theta) = [\mathbf{U}^H(\omega_1, \theta) \mathbf{W}_1 | \mathbf{U}^H(\omega_2, \theta) \mathbf{W}_2 | \dots | \mathbf{U}^H(\omega_K, \theta) \mathbf{W}_K] \quad (9)$$

因而,当 θ 为某一信号源的来波方向,即 $\theta = \theta_i$ ($i=1, \dots, L$) 时,矩阵 $\mathbf{D}(\theta)$ 将缺秩;反之,矩阵 $\mathbf{D}(\theta)$ 都是满秩^[4]。

在实际应用中,常利用正交投影矩阵 $\mathbf{P}(\omega_k, \theta)$ 来修正测试矩阵 $\mathbf{D}(\theta)$,这样不仅可以降低信号子空间分量对噪声子空间的泄漏影响,而且通过修正后的矩阵 $\mathbf{D}'(\theta)$ 得到的估计值的均方根误差更小^[2,5,11,15],表达式分别为

$$\mathbf{P}(\omega_k, \theta) = \mathbf{I} - (\mathbf{a}^H(\omega_k, \theta) \mathbf{a}(\omega_k, \theta))^{-1} \mathbf{a}(\omega_k, \theta) \mathbf{a}^H(\omega_k, \theta) \quad (10)$$

$$\mathbf{U}'(\omega_k, \theta) = \mathbf{P}(\omega_k, \theta) \mathbf{U}(\omega_k, \theta) \quad (11)$$

$$\mathbf{D}'(\theta) = [\mathbf{U}'^H(\omega_1, \theta) \mathbf{W}_1 | \mathbf{U}'^H(\omega_2, \theta) \mathbf{W}_2 | \dots | \mathbf{U}'^H(\omega_K, \theta) \mathbf{W}_K] \quad (12)$$

其中: \mathbf{I} 为 $M \times M$ 维的单位阵; \mathbf{U}' 为投影矩阵。因而,最终的宽带 DOA 估计可以由式(13)确定:

$$\hat{\theta} = \arg[\max_{\theta} \frac{1}{\sigma_{\min}(\theta)}] \quad (13)$$

其中, $\sigma_{\min}(\theta)$ 是矩阵 $\mathbf{D}'(\theta)$ 的最小奇异值。

2 基于波束空间的改进 TOPS 算法

尽管 TOPS 算法通过投影正交矩阵 $\mathbf{P}(\omega_k, \theta)$ 提高了部分估计性能,但是由于低信噪比时参考频点处的信号子空间存在误差,并且这种误差会影响各个频点处的正交性,导致该算法经常出现伪峰^[8-10]。

本文首先在 TOPS 算法基础上对修正后的矩阵 $\mathbf{D}'(\theta)$ 加以改进来抑制伪峰的出现,该方法简记为 MTOPS。

文献[6]指出,定义一个 $L \times L$ 维的方阵 $\mathbf{G}_k(\theta)$ 能够降低测试矩阵缺秩程度对 DOA 估计判断的敏感性,从而提高 DOA 估计精度。

$$\mathbf{G}_k(\theta) = \mathbf{U}'^H(\omega_k, \theta) \mathbf{W}_k \mathbf{W}_k^H \mathbf{U}'(\omega_k, \theta), \quad k=1, 2, \dots, K \quad (14)$$

由式(14)可以看出,矩阵 $\mathbf{G}_k(\theta)$ 中的元素变化范围为 $[0, 1]$ 。

因为只有当 θ 为信号 DOA 之一时,其导向矢

量 $\mathbf{a}(\omega_k, \theta)$ 才与该信号的噪声子空间 \mathbf{W}_k 正交, 则构造一个 $L \times L$ 维的方阵 $\mathbf{Z}_k(\theta)$:

$$\mathbf{Z}_k(\theta) = \mathbf{a}^H(\omega_k, \theta) \mathbf{W}_k \mathbf{W}_k^H \mathbf{a}(\omega_k, \theta) \quad (15)$$

由式(15)可以看出, 矩阵 $\mathbf{Z}_k(\theta)$ 中的元素变化范围为 $[0, M]$, 这里 M 为阵元个数。

为将矩阵 $\mathbf{Z}_k(\theta)$ 的变化范围和矩阵 $\mathbf{G}_k(\theta)$ 的变化范围相统一, 对矩阵 $\mathbf{Z}_k(\theta)$ 做以下修改:

$$\mathbf{Z}'_k(\theta) = \frac{\mathbf{Z}_k(\theta)}{M} \mathbf{I} \quad (16)$$

定义矩阵 $\mathbf{G}'_k(\theta) = \mathbf{G}_k(\theta) + \mathbf{Z}'_k(\theta)$, 则 MTOPS 算法的测试矩阵为

$$\mathbf{T}(\theta) = [\mathbf{G}'_1(\theta) | \mathbf{G}'_2(\theta) | \dots | \mathbf{G}'_K(\theta)] \quad (17)$$

因而, 可得到 DOA 估计为

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \frac{1}{\sigma_{T \min}(\theta)} \quad (18)$$

其中: $\sigma_{T \min}(\theta)$ 是矩阵 $\mathbf{T}(\theta)$ 的最小奇异值。

在实际应用中, 阵元的个数较多而信号源的个数相对较少, 即 $M > L$, 此时可以利用波束空间 (Beam-Space) 方法对阵元接收数据进行预处理, 并且选择恰当的波束形成矩阵, 可以提高算法分辨概率, 进而改善估计效果。

本文对上述 MTOPS 算法作进一步改进, 提出基于波束空间的改进算法, 该方法简记为 BMTOPS。

因为常规波束形成器的加权向量即为阵列导向矢量^[7], 则对于 M 阵元的均匀线列阵而言, 其导向矢量为

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{-j\pi\mu}, \dots, e^{-j(M-1)\pi\mu}]^T, \quad \mu = \sin \theta \quad (19)$$

构造一个由 B 个已知导向矢量组成的波束形成矩阵 \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = [\mathbf{a}(m \frac{2}{M}), \mathbf{a}((m+1) \frac{2}{M}), \dots, \mathbf{a}((M+B-1) \frac{2}{M})] \quad (20)$$

其中: B 为需要形成的波束个数, 一般要使得形成的波束指向范围覆盖所有期望信号的来波方向。

此时, 通过波束形成矩阵处理后的阵列输出为

$$\mathbf{Y}(\omega_k) = \mathbf{C}^H * \mathbf{X}(\omega_k) \quad (21)$$

由式(21)可以看出, 经过波束处理后的输出 $\mathbf{Y}(\omega_k)$ 是 $B \times 1$ 维数据而不是 $M \times 1$ 维, 相应的协方差矩阵也变为 $B \times B$ 维:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_Y(\omega_k) &= \mathbf{C}^H \mathbf{R}_X(\omega_k) \mathbf{C} = \mathbf{C}^H (\mathbf{A} \mathbf{R}_S(\omega_k) \mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}) \mathbf{C} = \\ & \mathbf{C}_0 \mathbf{R}_S(\omega_k) \mathbf{C}_0^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}^H \mathbf{A} = [\mathbf{C}^H \mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{C}^H \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{C}^H \mathbf{a}(\theta_K)]$ 。

此时, 对经过波束空间预处理后得到的协方差矩阵进行特征值分解, 从而获得该频点处的信号子空间和噪声子空间, 再结合 MTOPS 算法原理, 从

而得到宽带 DOA 估计值。

综上所述, 基于波束空间的改进 TOPS 算法可归纳为以下步骤:

(1) 对阵列接收数据做 DFT 变换, 从而将宽带信号分解成 K 个窄带信号;

(2) 设计覆盖信号来波方向的 B 个波束, 构造波束形成矩阵 \mathbf{C} ;

(3) 对各频点波束处理后得到的协方差矩阵利用特征值分解, 求得参考频点处的信号子空间 \mathbf{F}_0 和各频点处的噪声子空间 \mathbf{W}_k ;

(4) 对波束空间内任意可能的波达方向角构造测试矩阵 $\mathbf{T}(\theta)$;

(5) 对测试矩阵 $\mathbf{T}(\theta)$ 进行奇异值分解, 根据式(18)得到 DOA 估计值。

3 仿真实验

实验中利用的是一个阵元间距为宽带信号的中心频率所对应的半波长、阵元数为 20 的均匀线列阵。假定远场中存在两个分别位于 8° 和 12° 的不相关的宽带信号源, 其频率范围均为 $[80, 120]$ Hz, 采样频率为 300 Hz。宽带信号的快拍数为 50, 同时对每个信号添加不相关的零均值高斯白噪声, 通过对其做 128 点 DFT 得到信号带宽内 18 个频率点 ($K=18$) 的窄带分量。在指向为 $[-1/10, 4/10]$ rad 的范围内, 以 $1/10$ rad 为间隔, 选取 6 个指向波束方向构成波束形成矩阵。分别利用 TOPS 算法、MTOPS 算法和 BMTOPS 算法, 对两宽带信号源进行 DOA 估计。

图 1、2、3 分别是在信噪比为 -10 dB 时, 用上述三种方法仿真得到的空间谱。由图 1~3 中可以看出, 三种方法都能分辨出两个信号, 但是 TOPS 算法中存在许多伪峰, 而 MTOPS 算法中不存在伪峰。虽然 BMTOPS 算法也有伪峰出现, 但是在波束指向范围内没有伪峰出现; 并且该算法得到的峰值最为尖锐, MTOPS 算法次之。由此说明, 改进后的算法能够抑制伪峰, 提高分辨效果。

其次对三种算法在不同信噪比下的分辨概率进行比较。每种算法进行 50 次蒙特卡罗仿真实验。若对于单次实验, 算法能够准确区分出两个信号并且估计所得的结果与实际值之间的误差在 2° 之内, 则认为分辨正确。将正确分辨的次数与仿真次数之间的比值定义为分辨概率。

假定信噪比变化范围为 $[-20, 0]$ dB, 图 4 给出了三种方法在不同信噪比下的分辨概率。由此可见, 三种方法在信噪比较高时都能取得较高的分辨

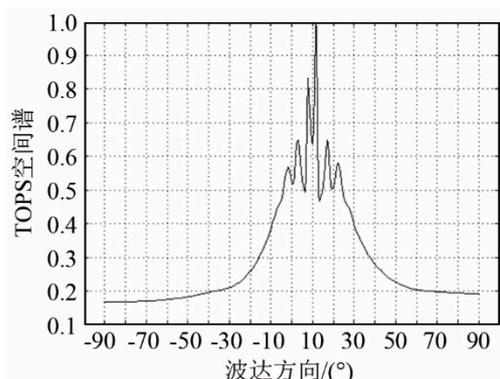


图1 TOPS 算法空间谱

Fig.1 Spatial spectrum of TOPS algorithm

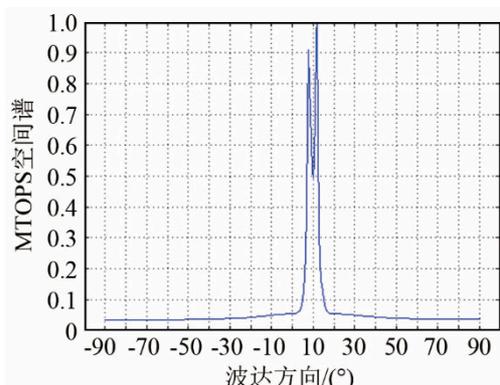


图2 MTOPS 算法空间谱

Fig.2 Spatial spectrum of MTOPS algorithm

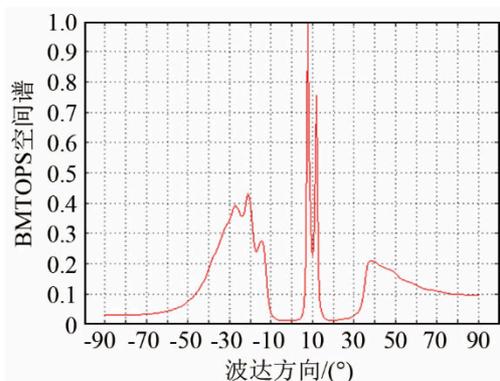


图3 BMTOPS 算法空间谱

Fig.3 Spatial spectrum of BMTOPS algorithm

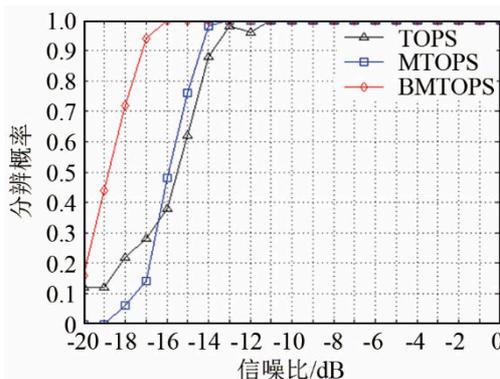


图4 三种算法在不同信噪比下的分辨概率

Fig.4 The resolution probabilities of three algorithms at different SNRs

概率；在信噪比高于 -16 dB 时，MTOPS 和 BMTOPS 算法的分辨概率均高于 TOPS 算法；但是随着信噪比的降低，BMTOPS 算法的分辨概率明显高于另外两种算法，这说明了该算法的分辨信噪比门限较低。

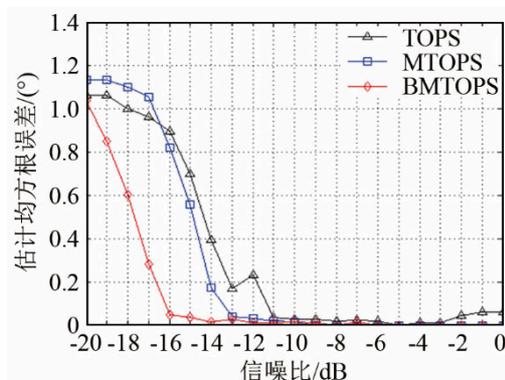
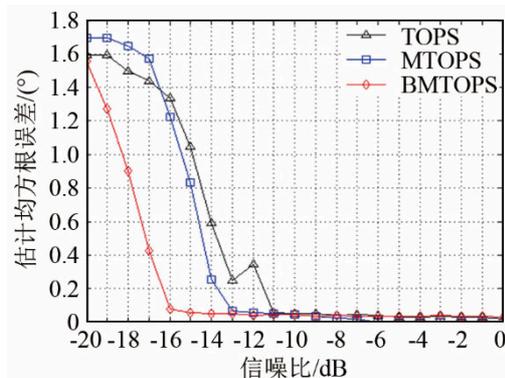
再利用估计均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)来评价三种算法在不同信噪比下的 DOA 估计性能。定义均方根误差为

$$e_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N (\theta_l - \theta)^2} \quad (23)$$

式中， N 为蒙特卡罗仿真次数； θ_l 为第 l 次仿真得到的 DOA 估计值； θ 为 DOA 实际值。

将信噪比变化范围设为 $[-20, 0]$ dB，对其进行 50 次蒙特卡罗仿真实验。图 5 和图 6 分别给出了在 8° 和 12° 方向上三种方法在不同信噪比下的估计均方根误差。由此可见，在高信噪比时，三种算法的估计均方根误差比较接近，性能基本相当；但在低信噪比时，BMTOPS 算法的估计均方根误差明显小于另外两种算法，因而估计效果更佳。

最后比较三种算法的运算复杂度。由前文所述，TOPS 算法和 MTOPS 算法的协方差矩阵 $\mathbf{R}_x(\omega_k)$

图5 不同信噪比下 8° 方向信号源的 DOA 估计均方根误差
Fig.5 RMSE of DOA estimation for the source signals of different SNRs in the 8° direction图6 不同信噪比下 12° 方向信号源的 DOA 估计均方根误差
Fig.6 RMSE of DOA estimation for the source signals of different SNRs in the 12° direction

的维数是 $M \times M$ ；而 BMTOPS 算法的协方差矩阵 $R_y(\omega_k)$ 的维数是 $B \times B$ 。一般情况下 $M > B$ ，因而在对协方差矩阵进行特征值分解时，BMTOPS 算法的运算复杂度要小于另外两种算法。

为了验证该结论，本文记录了在不同阵元个数时，TOPS 算法、MTOPS 算法和 BMTOPS 算法的运算时间。除阵元个数变化外，其余仿真条件与以上实验相同。

表 1 给出了三种算法的运算时间。由此可以看出，BMTOPS 算法的运算时间要小于另外两种算法，特别是在阵元个数越多时，时间缩减越明显。但是随着阵元数的减少，这种运算时间上的优势也随之降低，这是因为此时算法需要形成的波束数也随之减少。一般对于 10 阵元的阵列，形成 3 个波束便可满足要求^[3]。因而，当阵元个数较多时，本文提出的算法能够有效地减少运算量。

表 1 三种算法的运算时间(s)
Table 1 The computation time of three algorithms(s)

算法	TOPS 算法	MTOPS 算法	BMTOPS 算法
40 个阵元	13.433	8.064	1.543
30 个阵元	7.173	4.059	1.484
20 个阵元	3.519	2.565	1.352
10 个阵元	1.766	1.653	1.334

4 结论

为了克服 TOPS 算法经常容易出现伪峰的缺点，文中通过对 TOPS 算法中的正交性测试矩阵添加对角修正矩阵，提出了 MTOPS 算法；并且在此基础上，将波束空间方法与 MTOPS 算法相结合，得到了基于波束空间的改进 TOPS 算法(BMTOPS)。该算法不仅提高了分辨概率、降低了分辨信噪比门限，还能够保证在波束指向范围内不出现伪峰。通过对比发现，在高信噪比时，三种算法的估计性能比较相近；但是在低信噪比时，BMTOPS 算法的估计性能要优于另外两种算法。并且由于运用波束空间预处理降低了协方差矩阵的维数，因而对于阵元个数较多的情况，BMTOPS 算法的运算量要小于另外两种算法。

参 考 文 献

[1] KRIM H, VIBERG M. Two decades of array signal processing

- research: the parametric approach[J]. IEEE Trans. Signal Process, 1996, 13(4): 67-94.
- [2] YOON Y S, KAPLAN L M, MCCLELLAN J H. TOPS: new DOA estimator for wideband signals[J]. IEEE Trans. Signal Process, 2006, 54(6): 1977-1989.
- [3] 施思, 鲍庆龙, 陈曾平. 应用于波束域的改进 TOFS 算法[J]. 雷达科学与技术, 2015, 13(3): 314-319.
- SHI Si, BAO Qinglong, CHEN Zengping. An Improved TOFS Algorithm for DOA Estimation in Beam Space Domain[J]. Radar Science and Technology, 2015, 13(3): 314-319.
- [4] YU H, LIU J, HUANG Z, et al. A new method for wideband DOA estimation[C]//IEEE. WiCOM2007, 2007, 598-601.
- [5] 谢坚, 陈莹莹. 基于 TOFS 的宽带信号波束空间 DOA 估计[J]. 电子科技, 2012, 25(6): 60-63.
- XIE Jian, CHEN Yingying. TOFS-based beam space wideband DOA estimator[J]. Electronic Science and Technology, 2012, 25(6): 60-63.
- [6] OHTSUKI T, IKEDA S, OKANE K. Improvement of estimation accuracy of wideband DOA estimation "TOPS"[C]//APSIPA ASC 2009, 2009: 98-104.
- [7] 杜梓冰, 杨坤德. 低信噪比下重构协方差矩阵的高分辨 MUSIC 算法[J]. 声学技术, 2013, 34(5): 373-378.
- DU Zhibing, YANG Kunde. High resolution MUSIC algorithm reconstructing covariance matrix in low SNR[J]. Technical Acoustics, 2013, 34(5): 373-378.
- [8] OKANE K, OHTSUKI T. Resolution improvement of wideband direction-of-arrival estimation Squared-TOPS[C]//IEEE ICC2010, 2010: 1-5.
- [9] FENG D, BAO M, YE Z, et al. A novel wideband DOA estimator based on Khatri-Rao subspace approach[J]. Signal Process, 2011, 91(10): 2415-2419.
- [10] ZHANG J, DAI J, YE Z. An extended TOPS algorithm based on incoherent signal subspace method[J]. Signal Processing, 2010, 90(12): 3317-3324.
- [11] 李焜, 方世良. 基于波束域的子空间正交性测试宽带 DOA 估计方法研究[J]. 信号处理, 2012, 28(1): 131-138.
- Li Kun, Fang Shiliang. Research on the wideband DOA estimation with test of orthogonality of subspace based on beam space[J]. Signal Processing, 2012, 28(1): 131-138.
- [12] LIU D, LI Z, GUO X, et al. DOA estimation for wideband LFM signals with a few snapshots[J]. Eurasia Journal on Wireless Communications & Networking, 2017, 2017(1): 28.
- [13] LI J, WANG F, JIANG D. DOA Estimation based on real-valued cross correlation matrix of coprime arrays[J]. Sensors, 2017, 17(3): 638.
- [14] 张涛涛, 张兴敢. 基于改进 MUSIC 算法的宽带 DOA 估计[J]. 南京大学学报(自然科学版), 2016, 52(5): 932-938.
- ZHANG Taotao, ZHANG Xinggan. Broadband DOA estimation based on an improved MUSIC algorithm[J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2016, 52(5): 932-938.
- [15] YOON Y S, KAPLAN L M, MCCLELLAN J H. DOA Estimation of Wideband Signals[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2006, 24(1): 116-121.