

压电空心圆柱体中的周向 SH 波

禹建功^{1,2}, 李延峰¹

(1. 河南理工大学机械与动力学院, 河南焦作 454003; 2. 北京工业大学机电学院, 北京 100022;)

摘要: 基于三维线性压电弹性理论, 采用一种正交多项式级数方法研究了轴向极化、电开路时正交各向异性压电空心圆柱体中的周向 SH 波。把位移和电势展开成勒让德多项式级数, 引入点确定的材料常数以解决边界条件, 最后把问题的解简化为一个特征值问题。计算了不同径厚比下 PZT-4 管道周向 SH 的波频散曲线和电势分布。讨论了压电的影响。

关键词: 压电材料; 周向 SH 波; 正交多项式; 空心圆柱体; 频散曲线

中图分类号: O348

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2009)-01-0085-04

Circumferential SH waves in piezoelectric hollow cylinders

YU Jian-gong^{1,2}, LI Yan-feng¹

(1. School of Mechanical and Power Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, Henan, China;

2. College of Mechanical Engineering and Applied Electronic Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract: Based on the theory of linear three-dimensional piezoelectricity, an orthogonal polynomial series expansion approach is used for determining the characteristics of circumferential SH waves in orthotropic piezoelectric hollow cylinders with axial polarization and open circuit. The displacement components and electric potential, expanded in a series of Legendre polynomials, are introduced into the governing equations along with position-dependent material constants so that the solution of the wave equation is reduced to an eigenvalue problem. Dispersion curves and displacement distribution for PZT-4 hollow cylinders at different ratios are calculated and the effect of piezoelectricity is shown.

Key words: piezoelectric material; circumferential SH wave; orthogonal polynomial; hollow cylinders; dispersion curves

1 引言

压电材料(Piezoelectric Materials, PEM)是声发射装置的关键材料。因在换能器中的重要作用, 其振动特性已得到了广泛研究^[1,2]。目前, 它已经作为整体结构用于力电设备^[3]。波模态的选择, 直接影响着力电设备的性能, 因此研究压电材料中波的传播特性是重要的。作为一种常用的结构, 压电空心圆柱体中的波动问题受到了学者们的广泛关注。文献[4-7]分别研究了压电空心圆柱中轴向波的传播。SH 波因其独有的特性受到了学者们的关注。Hirao 和 Ogi 曾提出了一种周向 SH 波电磁声传感器技术用以检测钢管外表面的腐蚀缺陷^[8]。Zhao 和 Rose 给出了各向同性管道中周向 SH 波的准确解频散方程, 并研究了不同径厚比时管道中周向 SH 波特性的^[9]。本文基于线性三维压电弹性理论, 通过 Legendre 多项式方法求得了正交各向异性压电圆柱体中周向

SH 波的渐近解。从频散曲线和位移分布两方面分析了压电对管道周向 SH 波的影响, 并分析了不同径厚比下压电的不同影响。

2 基本方程与求解

基于线性三维弹性体理论, 考虑一均匀正交各向异性、无限长、内外表面均为自由表面的空心圆柱体(晶轴与坐标轴重合)。图 1 为一柱坐标系中的空心圆柱体, 其内径为 a 、外径为 b 、厚度为 h 。

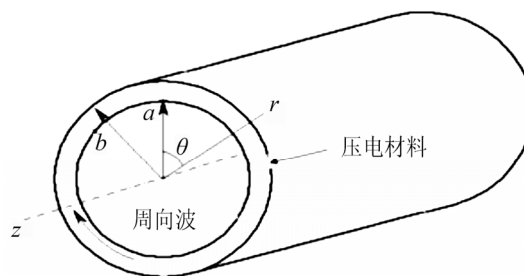


图 1 压电空心圆柱中的周向波

Fig.1 Circumferential SH waves in piezoelectric hollow cylinders

轴向极化的正交各向异性压电材料在柱坐标下的本构方程为:

收稿日期: 2008-03-04; 修回日期: 2008-06-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(10772009)

作者简介: 禹建功(1975-), 男, 河南开封人, 博士, 讲师, 研究方向为复合材料中波传播特性的研究。

通讯作者: 禹建功, E-mail: yu@emails.bjut.edu.cn

$$\begin{Bmatrix} T_{\theta\theta} \\ T_{zz} \\ T_{rr} \\ T_{rz} \\ T_{r\theta} \\ T_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rr} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (1a)$$

$$\begin{Bmatrix} D_\theta \\ D_z \\ D_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{34} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rr} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_\theta \\ E_z \\ E_r \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_\theta \\ E_z \\ E_r \end{Bmatrix} \quad (1b)$$

几何关系为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ E_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2)$$

波动控制方程为

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (3a)$$

$$\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (3b)$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (3c)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{D_r}{r} = 0 \quad (3d)$$

以上参数中, T_{ij} 和 ε_{ij} 代表应力和应变变量; u_i 是位移量; C_{ij} 为介质的弹性常数; ρ 代表密度; Φ 和 D_i 代表电势和电位移向量, E_i 代表电场强度; ε_{ij} 和 e_{ij} 分别是介电和压电常数。电开路时在 $r=a$ 和 $r=b$ 处 $D_r=0$, 考虑到材料的边界, 各种常数可以表示为:

$$\begin{aligned} C(r) &= C\pi(r), \quad \rho(r) = \rho\pi(r), \\ e(r) &= e\pi(r), \quad \varepsilon(r) = \varepsilon\pi(r) \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $\pi(r)$ 是矩形窗函数:

$$\pi(r) = \begin{cases} 1, & a \leq r \leq b \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

把约束条件(4)代入到方程(1), 使材料常数在空心圆柱体的内外边界上消失。这样处理的结果相当于求解运动方程后代入表面边界条件(在 $r=a$ 和 $r=b$ 时 $T_{rr}=0$ 、 $T_{r\theta}=0$ 、 $T_{rz}=0$)。其中 $\pi(a,b)$ 对 r 的导数是 $\delta(r-a)-\delta(r-b)$ 。

对于无限长压电空心圆柱体, 其周向的自由谐波解可以表示为:

$$u_r(r, \theta, z, t) = \exp(ikb\theta - i\omega t)U(r) \quad (5a)$$

$$u_\theta(r, \theta, z, t) = \exp(ikb\theta - i\omega t)V(r) \quad (5b)$$

$$u_z(r, \theta, z, t) = \exp(ikb\theta - i\omega t)W(r) \quad (5c)$$

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \exp(ikb\theta - i\omega t)X(r) \quad (5d)$$

这里 $U(r)$ 、 $V(r)$ 、 $W(r)$ 分别代表径向、周向和轴向的位移, $X(r)$ 代表电势幅度, k 是波传播方向的波数, ω 是角频率。

把式(1)、(2)、(4)、(5)代入到方程(3), 得到用位移、电势表示的波动控制方程:

$$\begin{aligned} &[r^2 C_{33} U'' + r C_{33} U' + rikb(C_{13} + C_{55})V' - k^2 b^2 C_{55} U - \\ &C_{11} U - ikb(C_{55} + C_{11})V]\pi(r) + (\delta(r-a) - \delta(r-b)) \cdot \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} &(r^2 C_{33} U' + r C_{13} U + rikb C_{13} V) = -\rho r^2 \omega^2 U \pi(r) \\ &[r^2 C_{55} V'' + rikb(C_{13} + C_{55})U' + r C_{55} V' - k^2 b^2 C_{11} V - \\ &C_{55} V + ikb(C_{55} + C_{11})U]\pi(r) + (\delta(r-a) - \delta(r-b)) \cdot \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} &r C_{55} (rV' + ikbU - V) = -\rho r^2 \omega^2 V \pi(r) \\ &[r^2 (C_{44} W'' + e_{34} X'') + r C_{44} W' + r e_{34} X' - k^2 b^2 C_{66} W - \\ &k^2 b^2 e_{16} X]\pi(r) + (\delta(r-a) - \delta(r-b))r^2 \cdot \end{aligned} \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} &(C_{44} W' + e_{34} X') = -\rho r^2 \omega^2 W \pi(r) \\ &[r^2 (e_{34} W'' - \varepsilon_{33} X'') + r e_{34} W' - r \varepsilon_{33} X' - \\ &k^2 b^2 e_{16} W + k^2 b^2 \varepsilon_{11} X]\pi(r) + \end{aligned} \quad (6d)$$

$$(\delta(r-a) - \delta(r-b))r^2 (e_{34} W' - \varepsilon_{33} X') = 0$$

可见, 方程(6c)、(6d)与方程(6a)、(6b)是相互独立的。方程(6a)和(6b)相互耦合, 它们控制的是周向类 Lamb 波, 与电场无关。方程(6c)控制的是周向 SH 波, 它与压电方程(6d)是耦合的。Yu 等曾研究了方程(6a)和(6b)控制的周向类 Lamb 波^[10], 这里只研究受压电影响的周向 SH 波。

把 $W(r)$ 和 $X(r)$ 展开为 Legendre 正交多项式级数:

$$W(r) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m^3 Q_m(r), \quad X(r) = \sum_{m=0}^{\infty} r_m Q_m(r) \quad (7)$$

其中 p_m^i ($i=1,2,3$) 是待定多项式系数,

$$Q_m(r) = \sqrt{\frac{2m+1}{(b-a)}} P_m \left(\frac{2r-(b+a)}{(b-a)} \right)$$

P_m 是第 m 阶勒让德多项式, 那么 Q_m 就形成了一组完备的正交归一的多项式组。理论上 m 从 0 到 ∞ , 实际上对于求和多项式(7), 当 m 取到有限值 M 时, 更高阶的项可以认为是高阶小量, 忽略不计。 M 的取值要根据所需要的模态阶数确定, 所需的频散曲线模态阶数越高, 则 M 的取值也越高。

对于方程(6c)和(6d), 两边同乘以 $Q_j^*(r)$, j 从 0 到 M , 然后各式对 r 从 a 到 b 积分, 利用勒让德正交多项式的正交性质, 可得到下面 $2(M+1)$ 个方程:

$$A_{33}^{j,m} p_m + A_{34}^{j,m} r_m = -\omega^2 M_m^j p_m \quad (8a)$$

$$A_{43}^{j,m} p_m + A_{44}^{j,m} r_m = 0 \quad (8b)$$

把方程(8b)写成如下形式:

$$r_m = -(A_{44}^{j,m})^{-1} A_{43}^{j,m} p_m^3 \quad (9)$$

把方程(9)代入方程(8a), 得:

$$\left[A_{33}^{j,m} - A_{34}^{j,m} (A_{44}^{j,m})^{-1} A_{43}^{j,m} \right] p_m = -\omega^2 M_m^j p_m \quad (10)$$

这里 $A_{\alpha\beta}^{j,m} (\alpha, \beta=3,4)$ 和 M_m^j 是非对称矩阵中的元素, 它们可以根据方程(6)得到。这样, 问题转化成一个特征值问题。特征值 ω^2 代表了波传播的角频率, 而特征向量 p_m 代表位移场的分布, r_m 代表电势的分布。使用 Mathematica 数学软件中 Eigenvalues 函数可以求解这个特征值问题。对于 $(M+1)$ 维的方阵, 将返回 $(M+1)$ 个特征值。而问题的解只是那些随着 M 的增加, 数值上收敛的特征值, 即随 M 的增加, 该阶模态已趋于稳定。

3 数值结果与分析

基于上述理论, 开发了数值计算压电空心圆柱体周向 SH 波频散关系的 Mathematica 程序, 求解了两种外径厚度比下 PZT-4 空心圆柱中的周向 SH 波频散曲线、位移分布及其对应的非压电情况。

图 2 是外径厚度比为 10 的 PZT-4 管道轴向极化时的周向 SH 波频散曲线及其相应的非压电情况。内外径分别是 9 mm 和 10 mm, 弹性常数 C_{44} 和 C_{66} 分别为 $2.56 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 和 $3.05 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 压电常数 $e_{16}=e_{34}=12.7 \text{ C/m}$, 介电常数 ϵ_{11} 、 ϵ_{33} 分别是 $560 \times 10^{-11} \text{ F/m}^2$ 和 $650 \times 10^{-11} \text{ F/m}^2$, 质量密度是 7.5 kg/m^3 。从频谱上看, 压电的影响随波数增加而加大; 从相速度谱上看, 压电的影响并不随频率的增加而加大。因此, 可以说压电的影响对波数的变化敏感。另外, 无论是频谱还是相速度谱, 都可以看出压电对高阶模态的影响大于低阶模态。

图 3 是外径厚度比为 2 时的情况。保持壁厚不变, 外径是 2 mm, 其余不变。比较图 2 与图 3 可见两者的区别: 小径厚比管道中的波速大于大径厚比; 小径厚比管道中 SH 波的频散现象更严重。

图 4 给出了大径厚比下 PZT-4 空心圆柱中 SH 波位移分布及其非压电的情况。相同波数下, 压电对高阶模态位移分布的影响要小于低阶模态, 大波数时压电的影响大于小波数的时候。图 5 是小径厚比的情况, 与图 4(a)相比较可知, 压电对小径厚比管道的影响要大于大径厚比管道。

4 结论

通过 Legendre 多项式方法求得了轴向极化电开路时压电圆柱体中周向 SH 波的渐近解。求得了不同径厚比下压电对管道周向 SH 波的频散曲线和位移分布, 基于上述分析可得如下结论:

- (1) 轴向极化的正交各向异性压电空心圆柱中的周向波可分解为周向类 Lamb 波和周向 SH 波。只有 SH 波受压电的影响, 而类 Lamb 波不受压电影响。
- (2) 通过把位移和电势展开成 Legendre 多项式

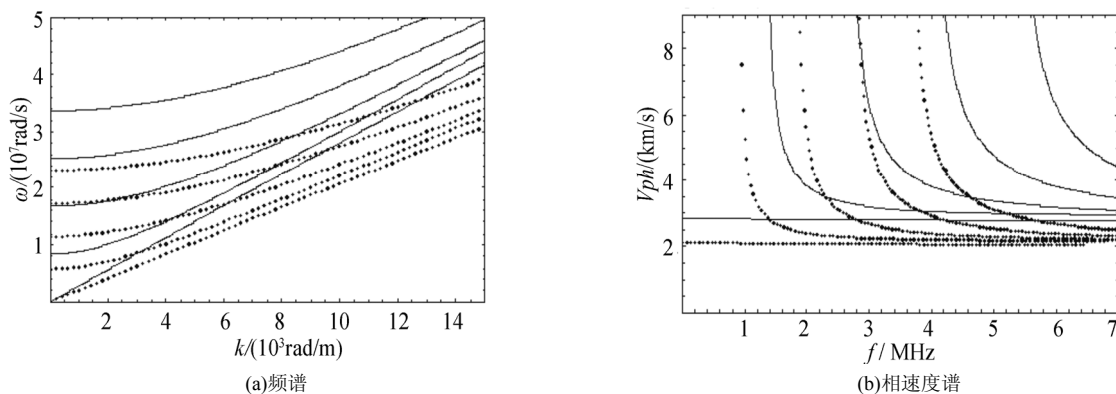


图 2 $\eta=10$ 时的频散曲线(实线: 压电管; 点线: 非压电管)

Fig.2 Dispersion curves when $\eta=10$ (solid line; piezoelectric; dotted line; non-piezoelectric) (a) frequency spectra; (b) phase velocity spectra

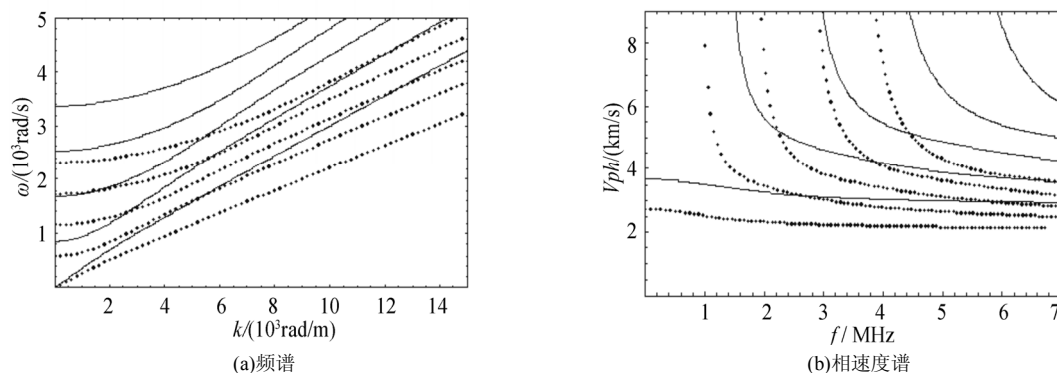


图3 $\eta=2$ 时的频散曲线(实线: 压电管; 点线: 非压电管)
Fig.3 Dispersion curves when $\eta=2$ (solid line: piezoelectric; dotted line: non-piezoelectric) (a) frequency spectra (b) phase velocity spectra

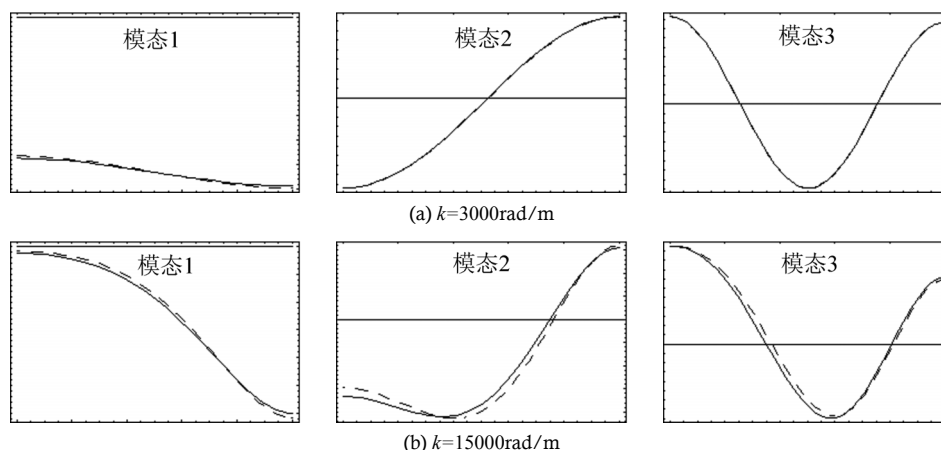


图4 $\eta=10$ 时的位移分布(虚线: 非压电情况; 实线: 压电情况)
Fig.4 Displacement distribution when $\eta=10$ (solid line: piezoelectric; dotted line: non-piezoelectric)

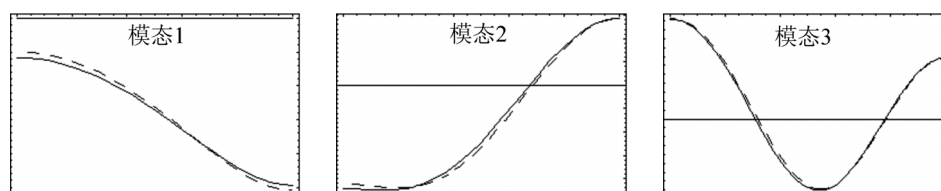


图5 $\eta=2$, $k=3000$ rad/m 时的波位移分布(虚线: 非压电情况; 实线: 压电情况)
Fig.5 Displacement distribution when $k=3000$ rad/m and $\eta=2$ (solid line: piezoelectric; dotted line: non-piezoelectric)

级数的形式可以把压电材料中的波动问题转化为特征值问题, 使问题得到简化。

(3) 对于压电管道中的周向 SH 波, 压电对高阶模态的影响大于低阶模态; 压电的影响随波数的增加而加大。

(4) 不同的径厚比下压电的影响也不相同, 小径厚比时压电的影响大于大径厚比。

参 考 文 献

- [1] 林书玉. 考虑压电效应时压电陶瓷圆形振子的耦合振动[J]. 声学技术, 1994, 15(1): 15-20.
- [2] 鲍善惠, 王艳东. 压电换能器在并联谐振频率附近特性的研究[J]. 声学技术, 2006, 25(2): 165-167.
BAO Shanhu, WANG Yandong. Behavior of piezoelectric transducer at frequencies near parallel resonance[J]. Technical Acoustics, 2006, 25(2): 165-167 (in Chinese).
- [3] Rao S S and Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structure: survey[J]. Appl. Mech. Rev., 1994, 47: 113-123.
- [4] WANG Q. Wave propagation in a piezoelectric coupled cylindrical membrane shell[J]. Int. J. Solids Struct., 2001, 38: 8207-8218.
- [5] WANG Q. Axi-symmetric wave propagation in a cylinder coated with a piezoelectric layer[J]. Int. J. Solids Struct., 2002, 39: 3023-3037.
- [6] DING H J, WANG H M, HOU P F. The transient responses of piezoelectric hollow cylinders for axisymmetric plane strain problems[J]. Int. J. Solids Struct., 2003, 40: 105-123.
- [7] 魏建萍, 苏先榭. 压电空心圆柱中波的传播[J]. 力学学报, 2004, 36(4): 484-490.
WEI Jianping, SU Xianxue. Wave propagation in the piezoelectric hollow cylinder[J]. ACTA MECHANICA SINICA 2004, 36(4): 484-490 (in Chinese).
- [8] Hitao M, Ogi H. An SH-wave EMAT technique for gas pipeline inspection[J]. NDT & E Int. 1999, (32): 127-132.
- [9] ZHAO Xiaoliang, Joseph L. Rose. Guided circumferential shear horizontal waves in an isotropic hollow cylinder[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2004, 115: 1912-1916.
- [10] YU Jiangong, WU Bin, HE Cunfu. Guided circumferential waves in orthotropic cylindrical curved plate and the mode conversion by the end-reflection [J]. Applied Acoustics, 2007, 68(5): 594-602.