分布源目标方位估计的降维最大似然估计

李 强[1]，李少杰[2]，李志舜[1]
（1. 西北工业大学航海学院，西安 710072；2. 西安电子科技大学通信工程学院，西安 710072）

摘要：介绍了已有的分布源目标方位估计中的最大似然估计(MLE)算法，它是四维非线性最优化问题，文中称之为四维 MLE 算法，因计算量庞大，同时提出了一种降为三维的 MLE 算法，简化为三维非线性最优化，称之为三维 MLE 算法。两种算法均采用牛顿型搜索算法，来搜索未知参数的全局最优点。在单次迭代过程中，三维 MLE 算法比四维 MLE 算法减少了 51 次协方差矩阵求逆和 87 次矩阵乘法，搜索效率得到提高，并且节省了存储空间。得出了新算法克拉美-罗界的计算公式，其计算量也有所降低。计算机仿真验证，三维 MLE 算法和四维 MLE 算法的估计精度相当，新算法在减少计算量的同时并无损失性能，所以实用性和实时性都得到显著提高。
关键词：最大似然估计算法；牛顿型搜索算法；全局最优点；克拉美-罗界
中图分类号：TN911　　文献标识码：A　　文章编号：1000-3630(2007)-04-0709-05

Lower dimensional maximum likelihood estimation of direction of arrival for distributed sources

LI Qiang[1]，LI Shao-jie[2]，LI Zhi-shun[1]
(1. College of Marine，Northwestern Polytechnical University，Shannxi，Xi'an 710072，China)
(2. School of Telecommunications Engineering，Xidian University，Shannxi，Xi'an 710072，China)

Abstract：In the estimation of direction of arrival (DOA) for distributed sources, maximum likelihood estimation (MLE) has attracted much attention because of its good performance. MLE is a four-dimensional nonlinear optimization problem with large computational cost, and is termed 4D MLE. We propose a lower dimensional MLE algorithm, which is simplified to a three dimensional nonlinear optimization problem, therefore called 3D MLE. Both 4D and 3D algorithms use the search algorithm of the Newton type to find the globe optimum. In a single search process, compared to the 4D method, the 3D MLE can reduce inverse operations of the covariance matrix by 51 times, and reduce matrix multiplications by 87 times. The search efficiency is improved and memory is saved. The Cramér-Rao bound (CRB) for the new 3D MLE algorithm is presented, showing reduction in the computation cost. Computer simulation shows that both methods have similar estimation accuracy. The 3D algorithm can also avoid loss of performance, and is more practicable.
Key words：maximum likelihood estimation；Newton type search algorithm；globe optimum；Cramér-Rao bound

1 引 言

在阵列信号处理领域中，目标的方位估计(DOA)一直受到研究者的广泛关注。传统的 DOA 估计中，往往假定阵列接收信号是由远场的点目标源入射而来。在此基础上，诞生了众多的估计方法，如 MUSIC、ESPRIT[1]等。然而在雷达、声纳和无线通讯等应用场合，这个假设往往是不合适的。例如信号散射现象会导致信号源的能量在空间形成一定的分布[2]。在无线通讯系统中，基站天线阵列存在的一个重要问题，就是在移动物体附近由于局部散射引起信号的快速衰减。当这种衰减存在时，运动物体在一定高度、环境和基站位置分布下，信号的空间角度分布往往可以达到 10°[3]。此时采用分布源模型将更

收稿日期：2006-03-24；2006-06-30
作者简介：李强(1979-)，男，陕西咸阳人，博士生，研究方向为信号与信息处理。
通信作者：李强，E-mail: franknwpu@hotmail.com

符合实际。

在众多的分布源目标方位估计算法中，MLE 算法具有最优的估计性能。该方法由 T.Trump 和 B. Ottersten[4]得出，是一个四维非线性最优化问题，文中称之为四维 MLE 算法。该算法计算量庞大，成为限制其应用的一个瓶颈。文中提出了一种降维的 MLE 算法，是三维非线性最优化问题，称之为三维 MLE 算法。新算法的目的是减少计算量，使其更具有实用性。最后通过计算机仿真检验了三维 MLE 算法的估计性能。

2 数据模型

接收阵列为 M 个阵元的均匀线列阵，接收到单个分布源入射来的信号，分布源认为是由在空间上满足高斯分布的多个离散点源构成的紧密的信号束。那么第 k 个阵元在 t 时刻接收到的信号可以描述为

$$x_k(t)=s(t)\sum_n \gamma_n(t)e^{j2\pi\Delta(k-1)\sin(\theta+\phi_n)}+v_k(n) \qquad (1)$$

式中 $s(t)$ 表示传播信号，并且为参数已知的确定性信号。$\gamma_n(t)$ 表示传播过程中的复增益，θ 是分布源的中心波达方向，ϕ_n 表示第 n 个点源相对于中心波达方向 θ 的偏差，Δ 是以信号波长为单位的阵元间距，$\exp(j2\pi\Delta(k-1)\sin(\theta+\phi_n))$ 表示阵列流型。$v_k(n)$ 为高斯白噪声，满足 0 均值、方差为 σ^2，且与信号之间是不相关的。进一步假定复增益 $\gamma_n(t)$ 在时域上是白的，满足相互独立、零均值和循环对称，

$$E[\gamma_n(t)]=0,\ E[\gamma_n(t)\gamma_m(s)]=0,$$

$$E[\gamma_n(t)\gamma^*_m(s)]=\frac{1}{L}\sigma_\gamma^2\delta_{nm}\delta_{ts},\ \forall n,m,t,s \qquad (2)$$

其中 δ 表示 Kronecker delta 函数。可以证明在上述条件下，阵列接收向量 $x(t)$ 为 0 均值的高斯随机过程[5]。

阵列的协方差矩阵表示为

$$E[x_k x^*_l]=|s(t)|^2 E[\sum_n\sum_i \gamma_k\gamma_l e^{j2\pi\Delta(k-1)\sin(\theta+\phi_n)} e^{-j2\pi\Delta(l-1)\sin(\theta+\phi_i)}]+\sigma^2\delta_{kl} \qquad (3)$$

σ^2 表示噪声的能量。根据前面的假设可知 $E[\gamma_n\gamma_i]=0, n\neq i$。进一步定义构成分布源的离散点源在空间上服从 $N(0,\sigma_\phi)$ 的高斯分布，其中 σ_ϕ 表示分布源空间角度扩展的标准差。式(3)可以进一步表示为[4,6]

$$E[x_k x^*_l]\approx\frac{S}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\phi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\phi^2}{2\sigma_\phi^2}} e^{j2\pi\Delta(k-1)\sin(\theta+\phi_n)}d\phi +\sigma^2\delta_{kl} \qquad (4)$$

其中 S 表示接收信号的功率。再进一步用 Bessel 函数将式(4)展开，可以得到

$$E[x_k x^*_l]\approx S[J_0(2\pi\Delta(k-1))+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(2\pi\Delta(k-l)) e^{-2n^2\sigma_\phi^2}\cos(2n\theta)]+2j\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(2\pi\Delta(k-l)) e^{-\frac{(2n-1)^2\sigma_\phi^2}{2}}\sin((2n-1)\theta)+\sigma^2\delta_{kl} \qquad (5)$$

在这里假定分布源角度扩展值 σ_ϕ^2 比较小，式(5)可以近似为

$$E[x_k x^*_l]\approx Se^{j2\pi\Delta(k-l)\sin\theta}e^{-2[\pi\Delta(k-l)]^2\sigma_\phi^2\cos^2\theta}+\sigma^2\delta_{kl} \qquad (6)$$

将式(6)扩展到阵列的一般表达式，可得

$$R_x\approx SA(\theta)B(\theta,\sigma_\phi)A^*(\theta)+\sigma^2I=SR+\sigma^2I \qquad (7)$$

式中 $A=[1,e^{j2\pi\Delta\sin(\theta)},\ \cdots,e^{j2\pi\Delta(M-1)\sin(\theta)}]^T$ 表示阵列流型向量，它是分布源中心波达方向的函数。B 为 $M\times M$ 的矩阵，它的第(k,l)个元素表示为 $B_{kl}=e^{-2[\pi\Delta(k-l)]^2\sigma_\phi^2\cos^2\theta}$。

3 MLE 算法引出

分布源目标参数估计的 MLE 算法已在文献[4]中做出了详细的描述。算法中采用牛顿型搜索算法进行迭代，以信号能量 S、噪声能量σ^2、分布源中心波达方向 θ 和分布源空间扩展角度的方差 σ_ϕ^2 为待估计参数。所以该算法是一个四维非线性最优化问题，在这里称之为四维 MLE 算法。

3.1 四维 MLE 算法

通过上一节的分析，可以得到在高斯数据模型下的负对数似然函数

$$L(S,\sigma^2,\sigma_\phi^2,\theta)=\lg|R_x|+\mathrm{Tr}\{R^{-1}_x\hat{R}_N\} \qquad (8)$$

其中$\hat{R}_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(t_i)x^*(t_i)$表示阵列采样的协方差矩阵，N 为快拍数。定义参数向量 $\boldsymbol{\eta}=[S\ \ \sigma^2\ \ \sigma_\phi^2\ \ \theta]^2$，它的估计值通过最小化 L 函数得到

$$\hat{\eta}=\underset{\eta}{\arg\min}L(S\ \ \sigma^2\ \ \sigma_\phi^2\ \ \theta) \qquad (9)$$

这是一个四维非线性最优化问题，采用牛顿型搜索算法得到的迭代公式为

$$\eta_{k+1}=\eta_k-\mu_k H^{-1}L' \qquad (10)$$

其中 μ_k 为迭代步长，向量 L 表示 L 函数对参数求偏导，它的任意项元素为

$$L_i\triangleq\mathrm{Tr}\{R^{-1}_x\frac{\partial R_x}{\partial\eta_i}(I-R^{-1}_x\hat{R}_N)\} \qquad (11)$$

H是 Hessian 矩阵，它的任意项元素为

$$H_{ij}=Tr\{[R_x^{-1}\frac{\partial^2 R_x}{\partial\eta_i\partial\eta_j}-R_x^{-1}\frac{\partial R_x}{\partial\eta_i}R_x^{-1}\frac{\partial R_x}{\partial\eta_j}](I-R_x^{-1}\hat{R}_N)+R_x^{-1}\frac{\partial R_x}{\partial\eta_i}R_x^{-1}\frac{\partial R_x}{\partial\eta_j}R_x^{-1}\hat{R}_N\} \tag{12}$$

为了减少计算量，认为当快拍数较大时 $R_x\approx\hat{R}_N$，上式可以简化为

$$\lim_{N\to\infty}H_{ij}=Tr\{R_x^{-1}\frac{\partial R_x}{\partial\eta_i}R_x^{-1}\frac{\partial R_x}{\partial\eta_j}\} \tag{13}$$

由式(5)、(7)，可以求得阵列协方差矩阵对各参数的导数公式[4](见附录 A)。

四维 MLE 算法的计算量较大，在每次迭代过程中需要计算矩阵 R_x 的逆矩阵和大量的矩阵乘法。此外合适的选择迭代初值，是算法能否收敛到全局最优点的关键。

参数向量 $\boldsymbol{\eta}=[S\ \ \sigma^2\ \ \sigma_\phi^2\ \ \theta]^T$ 方差的 CRB 由 Fisher 信息矩阵(FIM)的逆矩阵给出，FIM 的任意项元素的表达式为

$$FIM_{ij}=NTr\{R_x^{-1}\frac{\partial R_x}{\partial\eta_i}R_x^{-1}\frac{\partial R_x}{\partial\eta_j}\} \tag{14}$$

3.2　三维 MLE 算法

由于四维 MLE 算法计算量庞大，这里提出一种降维的 MLE 算法。新方法将未知参数减少为三个，称之为三维 MLE 算法。

前面式(7)给出了阵列接收信号的一般表达形式，现实中研究者们往往更关心信噪比，而不是信号和噪声能量值的具体大小，所以将式(7)中各物理量重新定标，规定噪声的能量为单位值 1，那么式(7)可以改写为

$$\tilde{R}_x\approx SNR\cdot A(\theta)B(\theta,\sigma_\phi)A^*(\theta)+I=SNR\cdot R+I \tag{15}$$

其中 SNR=S/1 表示信噪比。这样新的阵列协方差矩阵的未知参数减少为三个，那么负对数似然函数也相应变化为

$$\tilde{L}(SNR,\sigma_\phi^2,\theta)=\lg|\tilde{R}_x|+Tr\{\tilde{R}_x^{-1}\hat{R}_N\} \tag{16}$$

同时可以定义新的参数向量 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}=[SNR\ \ \sigma_\phi^2\ \ \theta]^T$，它的估计值通过最小化函数 $\tilde{L}$ 得到

$$\tilde{\eta}=\arg\min_{\tilde{\eta}}L(SNR,\sigma_\phi^2,\theta) \tag{17}$$

原本四维最优化问题此时已经简化至三维，同样采用牛顿型搜索算法，迭代公式为

$$\tilde{\eta}_{k+1}=\tilde{\eta}_k-\tilde{\mu}_k\tilde{H}^{-1}\tilde{L}' \tag{18}$$

$\tilde{\mu}_k$ 表示迭代步长，向量 $\tilde{L}$ 表示 $\tilde{L}$ 函数对参数求偏导，它的任意项元素为

$$\tilde{L}_i'=Tr\{\tilde{R}_x^{-1}\frac{\partial\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_i}(I-\tilde{R}_x^{-1}\hat{R}_N)\} \tag{19}$$

Hessian矩阵 $\tilde{H}$ 的任意项元素为

$$\tilde{H}_{ij}=Tr\{[\tilde{R}_x^{-1}\frac{\partial^2\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_i\partial\tilde{\eta}_j}-\tilde{R}_x^{-1}\frac{\partial\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_i}\tilde{R}_x^{-1}\frac{\partial\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_j}](I-\tilde{R}_x^{-1}\hat{R}_N)+\tilde{R}_x^{-1}\frac{\partial\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_i}\tilde{R}_x^{-1}\frac{\partial\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_j}\tilde{R}_x^{-1}\hat{R}_N\} \tag{20}$$

当快拍数目较大时，也可将式(20)做进一步简化，得

$$\lim_{N\to\infty}\tilde{H}_{ij}=Tr\{\tilde{R}_x^{-1}\frac{\partial\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_i}R_x^{-1}\frac{\partial\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_j}\} \tag{21}$$

参照附录 A 中的结论，可以推导 $\tilde{R}_x$ 对 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ 中各参数的一阶和二阶导数(见附录 B)。

结合式(14)，可得三维 MLE 算法的 Fisher 信息矩阵 $F\tilde{I}M$，

$$F\tilde{I}M_{ij}=NTr\{\tilde{R}_x^{-1}\frac{\partial\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_i}\tilde{R}_x^{-1}\frac{\partial\tilde{R}_x}{\partial\tilde{\eta}_j}\} \tag{22}$$

易知 $F\tilde{I}M$ 为 3×3 的方阵，三维 MLE 算法估计方差的 CRB 由 $F\tilde{I}M$ 的逆矩阵给出。

比较上述两种 MLE 算法，三维 MLE 算法中的导数向量 $\tilde{L}$ 要比四维 MLE 算法中的导数向量 $\tilde{L}$ 减少一维，在每一次迭代过程中，将会减少 2 次协方差矩阵求逆和 3 次矩阵乘法。并且三维 MLE 算法中的 $\tilde{H}$ 是 3×3 的方阵，而四维 MLE 算法中 H 是 4×4 的方阵，那么在用程序计算 Hessian 矩阵时，得出共需要 9 次内部循环，而得出 H 需要 16 次内部循环。参照式(12)和式(20)，每求一次 Hessian 矩阵，四维 MLE 算法要比三维 MLE 算法多计算 49 次协方差矩阵求逆和 77 次矩阵乘法。此外在计算导数向量和 Hessian 矩阵相乘时，三维 MLE 算法需要计算 9 次矩阵乘法，四维 MLE 算法需要计算 16 次矩阵乘法。因此总体而言，经过一次牛顿法迭代计算，三维 MLE 算法比四维 MLE 算法节省 51 次协方差矩阵求逆和 87 次矩阵乘法。在计算 CRB 时，三维 MLE 算法也可以令其得到简化。同时三维 MLE 算法还可以节省大量的存储空间，因此计算效率可以得到显著的提高。

4　计算机仿真

在本节中，通过计算机仿真将三维 MLE 算法和四维 MLE 算法的估计性能进行比较。采用均匀线列阵，阵元之间的间距为波长的 1/2。分布源信号由 100 个在空间上服从高斯分布的点源构成，并且点源信号之间相互独立。分布源的几何中心即为待求的中心波达方向，在仿真中均设定为 10°。背景噪

声的能量设定为单位值1。

下面将从信噪比、快拍数、阵元数目和分布源空间扩展角度4个方面入手，比较两种MLE算法的估计性能，仿真中RMSE值由100次蒙特卡罗试验计算得出。

4.1 算法在不同信噪比下性能比较

快拍数选取为100，阵元数目为8，分布源空间扩展的标准差为1°，信噪比分别选取0dB、5dB、10dB和15dB。三维MLE算法和四维MLE算法在不同信噪比下参数估计的RMSE值和相应的CRB值如表1所示。随着信噪比的升高，两种算法的RMSE值和相应的CRB值随之降低。

表1 不同信噪比下两种MLE算法估计性能比较
Table 1 Performance comparing of two MLE algorithms in different SNRs

SNR	三维MLE估计的RMSE	三维MLE的CRB	四维MLE估计的RMSE	四维MLE的CRB
0dB	0.267 7	0.233 4	0.291 3	0.233 3
5dB	0.162 4	0.139 6	0.171 6	0.139 6
10dB	0.115 8	0.097 3	0.153 3	0.097 3
15dB	0.132 0	0.079 2	0.152 2	0.079 2

4.2 算法在不同快拍数下性能比较

信噪比选取为10dB，阵元数目为8，分布源空间扩展的标准差为1°，快拍数分别选取10、50、100和500。三维MLE算法和四维MLE算法在不同快拍数下参数估计的RMSE值和相应的CRB值如表2所示。随之快拍数的增加，两种算法的RMSE值和相应的CRB值随之降低。

表2 不同快拍数目下两种MLE算法估计性能比较
Table 2 Performance comparing of two MLE algorithms in different number of snapshots

快拍数目	三维MLE估计的RMSE	三维MLE的CRB	四维MLE估计的RMSE	四维MLE的CRB
10	0.416 6	0.307 6	0.330 3	0.307 5
50	0.174 6	0.137 6	0.188 3	0.137 6
100	0.115 8	0.097 3	0.153 3	0.097 3
500	0.093 2	0.043 5	0.110 2	0.043 5

4.3 算法在不同阵元数下性能比较

信噪比选取为10dB，快拍数为100，分布源空间扩展的标准差为1°，阵元数目分别选取4、8、12和16。三维MLE算法和四维MLE算法在不同快拍数下参数估计的RMSE值和相应的CRB值如表3所示。随之阵元数目的增加，两种算法的RMSE值和相应的CRB值随之减小。

表3 不同阵元数目下两种MLE算法估计性能比较
Table 3 Performance comparing of two MLE algorithms in different arrays

阵元数目	三维MLE估计的RMSE	三维MLE的CRB	四维MLE估计的RMSE	四维MLE的CRB
4	0.218 9	0.201 9	0.208 9	0.201 9
8	0.145 8	0.097 3	0.153 3	0.097 3
12	0.126 6	0.078 2	0.140 3	0.078 2
16	0.118 2	0.067 3	0.116 7	0.067 3

4.4 算法在不同空间扩展角度下性能比较

信噪比选取为10dB，快拍数为100，阵元数目为8，分布源空间扩展角度的标准差分别选取1°、2°、3°、4°和5°。三维MLE算法和四维MLE算法在不同空间扩展角度下参数估计的RMSE值和相应的CRB值如表3所示。随之分布源空间扩展角度的增大，两种算法的RMSE值和相应的CRB值随之增长。因为算法的模型是建立在小角度扩展的条件下的，所以随着分布源空间扩展角度的增加，两种算法的估计精度有较明显的降低。

表4 不同分布源空间扩展角度下两种MLE算法估计性能比较
Table 4 Performance comparing of two MLE algorithms in different angular spreads

扩展角度	三维MLE估计的RMSE	三维MLE的CRB	四维MLE估计的RMSE	四维MLE的CRB
1°	0.115 8	0.097 3	0.153 3	0.097 3
2°	0.248 4	0.152 3	0.267 7	0.152 3
3°	0.332 4	0.192 3	0.357 6	0.192 3
4°	0.492 2	0.226 6	0.483 6	0.226 6
5°	0.582 8	0.260 2	0.620 9	0.260 2

上面比较了三维MLE算法和四维MLE算法在分别改变4种参数时的估计性能。总体而言，两者估计性能的变化趋势是一致的，而且估计精度接近。三维MLE算法在减少计算量的同时没有损失性能，因而有更实际的应用价值。

5 总 结

在雷达、声纳和无限通讯领域的研究中，采用分布源目标模型往往比点目标模型更贴近实际。分布源目标方位估计是其中一个重要的研究课题，在已有的估计方法中，MLE算法具有最优的估计性能，因而受到研究者的广泛关注。该方法是一个四维非线性最优化问题，这里称之为四维MLE算法，它的计算量庞大，这也成为限制其应用的一个瓶颈。文中提出了一种降维的MLE算法，新方法是三维非线性最优化问题，称之为三维MLE算法。理论

分析表明新算法的计算量比四维 MLE 算法大为减少，在单次牛顿法搜索过程中，新算法可以节省 51 次协方差矩阵求逆和 87 次矩阵乘法。同时三维 MLE 算法还可以节省大量的存储空间，因此计算效率可以得到提高。文中对新算法性能的评估准则 CRB 给出了具体的计算公式，新 CRB 的计算量也有所降低。最后通过计算机仿真验证，三维 MLE 算法和四维 MLE 算法的估计精度相当，因此新算法在减少计算量的同时没有损失性能，实用性和实时性都显著提高。

附录 A

四维 MLE 算法中，R_x 对 η 中各参数的一阶导数：

$$\frac{\partial R_x}{\partial S}=R \tag{22}$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial \sigma^2}=I \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial R_x}{\partial \theta}\right)_{kl}\approx 2S\cdot R_{kl}\cdot[2(\pi\Delta(k-l))^2\sigma_\phi^2\cos(\theta)\sin(\theta)+j\pi\Delta(k-l)\cos(\theta)] \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial R_x}{\partial \sigma_\phi^2}\right)_{kl}\approx -2S\cdot R_{kl}\cdot[(\pi\Delta(k-l))^2\cos^2(\theta)] \tag{25}$$

R_x 对 η 中各参数的二阶导数：

$$\left(\frac{\partial^2 R_x}{\partial \theta^2}\right)_{kl}\approx S\cdot R_{kl}\cdot[2(\pi\Delta(k-l))^4\sigma_\phi^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+(2\pi\Delta(k-l))^2(\sigma_\phi^2-1)\cos^2(\theta)-(2\pi\Delta(k-l))^2\sigma_\phi^2\sin^2(\theta)+j2\cdot(2\pi\Delta(k-l))^3\sigma_\phi^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)-j2\pi\Delta(k-l)\sin(\theta)] \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial^2 R_x}{\partial (\sigma_\phi^2)^2}\right)_{kl}\approx S\cdot R_{kl}\cdot[4(\pi\Delta(k-l))^4\cos^4(\theta)] \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial^2 R_x}{\partial \theta\partial \sigma_\phi^2}\right)_{kl}\approx S\cdot R_{kl}\cdot[-8(\pi\Delta(k-l))^4\sigma_\phi^2\cos^3(\theta)\sin(\theta)+(2\pi\Delta(k-l))^2\cos(\theta)\sin(\theta)-j4(\pi\Delta(k-l))^3\cos^3(\theta)] \tag{28}$$

二阶导数中其它的参数组合可以由一阶导数很容易的求出，这里不再列举。

附录 B

三维 MLE 算法中，$\tilde{R}_x$ 对 $\tilde{\eta}$ 中各参数的一阶导数：

$$\frac{\partial \tilde{R}_x}{\partial SNR}=R \tag{29}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}_x}{\partial \theta}\right)_{kl}\approx 2SNR\cdot R_{kl}\cdot[2(\pi\Delta(k-l))^2\sigma_\phi^2\cos(\theta)\sin(\theta)+j\pi\Delta(k-l)\cos(\theta)] \tag{30}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}_x}{\partial \sigma_\phi^2}\right)_{kl}\approx -2SNR\cdot R_{kl}\cdot[(\pi\Delta(k-l))^2\cos^2(\theta)] \tag{31}$$

$\tilde{R}_x$ 对 $\tilde{\eta}$ 中各参数的二阶导数：

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{R}_x}{\partial \theta^2}\right)_{kl}\approx SNR\cdot R_{kl}\cdot[2(\pi\Delta(k-l))^4\sigma_\phi^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+(2\pi\Delta(k-l))^2(\sigma_\phi^2-1)\cos^2(\theta)-(2\pi\Delta(k-l))^2\sigma_\phi^2\sin^2(\theta)+j2\cdot(2\pi\Delta(k-l))^3\sigma_\phi^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)-j2\pi\Delta(k-l)\sin(\theta)] \tag{32}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{R}_x}{\partial (\sigma_\phi^2)^2}\right)_{kl}\approx SNR\cdot R_{kl}\cdot[4(\pi\Delta(k-l))^4\cos^4(\theta)] \tag{33}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{R}_x}{\partial \theta\partial \sigma_\phi^2}\right)_{kl}\approx SNR\cdot R_{kl}\cdot[-8(\pi\Delta(k-l))^4\sigma_\phi^2\cos^3(\theta)\sin(\theta)+(2\pi\Delta(k-l))^2\cos(\theta)\sin(\theta)-j4(\pi\Delta(k-l))^3\cos^3(\theta)] \tag{34}$$

由一阶偏导易得二阶偏导的其它项参数组合，这里不再赘述。

参　考　文　献

[1] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67-94.

[2] Valaee S, Champagne B, Kabal P. Parametric localization of distributed sources[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1995, 43(9): 2144-2153.

[3] Pedersen K I, Mogensen P E, Fleury B H. A stochastic model of the temporal and azimuthal dispersion seen at the base station in outdoor propagation environments[J]. IEEE Trans, Veh. Technology, 2000, 49(3): 437-447.

[4] Trump T, Ottersten B. Estimation of nominal DOA and angular spread using an array of sensors[J]. Signal Processing, 1996, 4.

[5] Zetterberg P, Ottersten B. The spectrum efficiency of a basestation antenna array system for spatially selective transmission[J]. IEEE Trans. on Vehicular Technology, 1995, 44(3): 651-660.

[6] 刘申建，空间分布源波达方向估计及其性能分析研究[D]. 清华大学博士论文，2003.
LIU Shenjian. Studies on Bearing Estimation and Its Performance Analysis for Spatially Distributed Sources[D]. Tsinghua University, 2003.