

利用复相关法估计信号的平均频率

竺 春, 向大威

(中国科学院声学所东海研究站, 上海 200032)

摘 要: 文章介绍了利用复相关估计信号平均频率的方法, 并就其采样周期的选取与频率估计误差间的关系作了分析, 最后给出最佳采样频率以及平均频率测量误差的实测结果。

关键词: 复相关; 平均频率; 采样周期

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A

Average frequency estimation by using complex correlation method

ZHU Chun, XIANG Da-wei

(Shanghai Acoustics Laboratory, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200032, China)

Abstract: Complex correlation method for estimating average frequency of signal is introduced in this paper. In order to reduce the influence of noise on the estimation error, the relationship between the sampling frequency and estimation error is analyzed. Optimal sampling frequency and experimental results of the estimation are also given.

Key words: complex correlation; average frequency; sampling cycle

1 引 言

在声呐信号处理中, 有时需要获取信号的平均频率。现在比较常用的方法是过零计数法和 FFT 分析法。本文介绍了一种求取平均频率的新方法——复相关测频法。

2 复相关测频法

假设某声呐系统发射频率为 f_T 的声波, 则回波信号 $e(t)$ 为一窄带信号, 其中心频率为 f_T :

$$e(t) = \operatorname{Re}\{z(t)e^{j2\pi f_T t}\}$$

式中, $z(t)$ 是 $e(t)$ 的复包络信号, 利用正交变频器可得 $z(t)$ 的实部 $x(t)$ 及虚部 $y(t)$, $z(t)$ 可表示为:

$$z(t) = x(t) + jy(t)$$

据复相关函数的定义, $z(t)$ 的复相关函数可表示为:

$$R(T, t) = \int_{-T}^t z(t') z^*(t' - T) dt'$$

式中

$$z^*(t' - T) = x(t' - T) - jy(t' - T)$$

所以

$$R(T, t) = \int_{-T}^t [x(t') + jy(t')][x(t' - T) - jy(t' - T)] dt'$$

$$= R_{\text{REAL}}(T, t) + jR_{\text{IM}}(T, t)$$

其中

$$R_{\text{REAL}}(T, t) = \int_{-T}^t [x(t')x(t' - T) + y(t')y(t' - T)] dt'$$

$$R_{\text{IM}}(T, t) = \int_{-T}^t [y(t')x(t' - T) - x(t')y(t' - T)] dt'$$

根据复相关函数的定义, 复相关函数 $R(T, t)$ 还可表示为:

$$R(T, t) = |R(T, t)| e^{j\varphi(T, t)} \quad (1)$$

式中

$$|R(T, t)| = \sqrt{R_{\text{REAL}}^2(T, t) + R_{\text{IM}}^2(T, t)} = A(T, t) \quad (\text{偶函数}) \quad (2)$$

$$\varphi(T, t) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{R_{\text{IM}}(T, t)}{R_{\text{REAL}}(T, t)} \quad (\text{奇函数}) \quad (3)$$

我们将 $R(T, t) = A(T, t)e^{j\varphi(T, t)}$ 对 T 求导, 可得:

$$\dot{R}(T, t) = \dot{A}(T, t)e^{j\varphi(T, t)} + A(T, t)j\dot{\varphi}(T, t)e^{j\varphi(T, t)}$$

令 $T=0$, 得:

$$\dot{R}(0, t) = \dot{A}(0, t)e^{j\varphi(0, t)} + A(0, t)j\dot{\varphi}(0, t)e^{j\varphi(0, t)} \quad (4)$$

由于 $A(T, t)$ 为偶函数, 因此 $A(0, t)=0$, 而 $\varphi(T, t)$ 是奇函数, 则有 $\varphi(0, t)=0$, 于是由式(1)、式(2)和式(4)可得:

$$\begin{aligned} \dot{R}(0, t) &= jA(0, t)\dot{\varphi}(0, t) \\ &= j|R(0, t)|\dot{\varphi}(0, t) \\ &= jR(0, t)\dot{\varphi}(0, t) \end{aligned}$$

收稿日期: 2001-03-20; 修回日期: 2001-06-21

作者简介: 竺春(1974-), 男, 上海人, 硕士研究生, 从事数字信号处理工作。

$$\text{即: } \dot{\varphi}(0, t) = -j \frac{\dot{R}(0, t)}{R(0, t)} \quad (5)$$

若 $z(t)$ 的功率谱密度为 $s(\omega)$, 则 $s(\omega)$ 的平均频率可表示为:

$$\omega_{AV} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega s(\omega) d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) d\omega} \quad (6)$$

根据 Wiener-Kihnhchine 定理:

$$R(T, t) = \frac{1}{2\pi} \int s(\omega, t) e^{j\omega T} d\omega \quad (7)$$

上式两边同时对 T 求导, 则:

$$\dot{R}(T, t) = \frac{1}{2\pi} j \int \omega s(\omega, t) e^{j\omega T} d\omega \quad (8)$$

将 $T=0$ 代入式(7)和式(8), 得:

$$\dot{R}(0, t) = j \frac{1}{2\pi} \int \omega s(\omega, t) d\omega$$

$$R(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int s(\omega, t) d\omega$$

利用上两式和式(6), 得:

$$\omega_{AV} = -j \frac{\dot{R}(0, t)}{R(0, t)} \quad (9)$$

由式(5)和式(9)显见:

$$\omega_{AV} = \dot{\varphi}(0, t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\varphi(T, t) - \varphi(0, t)}{T}$$

因为 $\varphi(0, t) = 0$, 所以回波的平均频率为:

$$\omega_{AV} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\varphi(T, t)}{T}$$

其中 $\varphi(T, t)$ 可以从式(3)求得:

$$\varphi(T, t) = \text{tg}^{-1} \frac{\int_0^t [y(t')x(t'-T) - x(t')y(t'-T)] dt'}{\int_0^t [x(t')x(t'-T) + y(t')y(t'-T)] dt'} \quad (10)$$

$$\varphi'(T, t) |_{t=T_{\text{int}}} = \text{tg}^{-1} \frac{\int_0^{T_{\text{int}}} [y(t') + n_y(t')][x(t'-T) + n_x(t'-T)] - [x(t') + n_x(t')][y(t'-T) + n_y(t'-T)] dt'}{\int_0^{T_{\text{int}}} [x(t') + n_x(t')][x(t'-T) + n_x(t'-T)] + [y(t') + n_y(t')][y(t'-T) + n_y(t'-T)] dt'}$$

式中, T_{int} 为积分时间。设信号和噪声不相关, 并用 $R(T)$ 代表相关函数, 则:

$$\varphi'(T, t) |_{t=T_{\text{int}}} = \text{tg}^{-1} \frac{T_{\text{int}}[R_{yx}(T) - R_{xy}(T) + R_{n_y n_x}(T) - R_{n_x n_y}(T)]}{T_{\text{int}}[R_{xx}(T) + R_{yy}(T) + R_{n_x n_x}(T) + R_{n_y n_y}(T)]} \quad (12)$$

根据窄带噪声相关函数的性质^[2]可知:

$$R_{n_y n_x}(T) = -R_{n_x n_y}(T), \quad R_{n_x n_x}(T) = R_{n_y n_y}(T)$$

故式(12)可化为:

$$\varphi'(T, t) |_{t=T_{\text{int}}} = \text{tg}^{-1} \frac{T_{\text{int}}[R_{yx}(T) - R_{xy}(T) + 2R_{n_y n_x}(T)]}{T_{\text{int}}[R_{xx}(T) + R_{yy}(T) + 2R_{n_x n_x}(T)]} \quad (13)$$

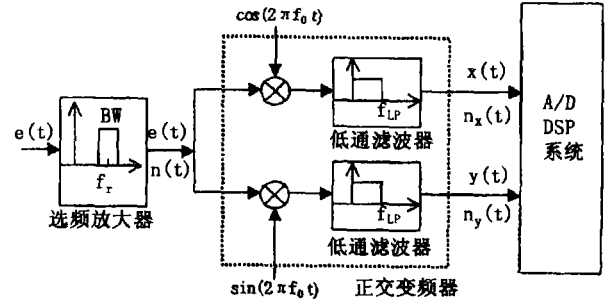


图1 复相关测频的实现框图

于是平均角频率可由 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的自相关函数以及 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互相关函数求得。

实现框图如图1所示, 选频放大器的中心频率为 f_T , 带宽为 BW ; 正交变频器的本征频率 f_0 满足 $f_0 < f_T - \frac{BW}{2}$, 低通滤波器的截止频率 $f_{LP} > f_T - f_0 + \frac{BW}{2}$ 。信号 $e(t)$ 经正交变频后, 得到其复包络信号的实部 $x(t)$ 与虚部 $y(t)$; 噪声 $n(t)$ 经正交变频后, 得到其复包络信号的实部 $n_x(t)$ 与虚部 $n_y(t)$ 。两路正交信号被分别送入 DSP 系统, 经解算得出信号 $e(t)$ 的平均频率。

3 复相关测频法中采样周期的选取

如果不考虑积分时间对复相关测频的影响, 而只考虑噪声的影响, 则复相关测频公式将变为如下形式:

$$\omega_{AV} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\varphi'(T, t) |_{t=T_{\text{int}}}}{T} \quad (11)$$

其中, $\varphi'(T, t) |_{t=T_{\text{int}}}$ 为:

不难看出,当存在噪声时,利用复相关法测量平均角频率将受到 $n_x(t)$ 与 $n_y(t)$ 的自相关函数和互相关函数的影响,即存在着测频误差。

下面,我们将分别给出信号和噪声相关函数的形式,并进一步讨论减小测频误差的方法。为分析方便,假设输入信号 $e(t)$ 是一单频连续信号,其频率为 f 、幅度为 A_m ,即 $e(t) = A_m \cos(2\pi ft)$,而噪声 $n(t)$ 是中心频率为 f_T 、带宽为 BW 的窄带平稳白噪声。若令:

$$A = T_{\text{int}}[R_{yx}(T) - R_{xy}(T)]$$

$$C = 2T_{\text{int}}R_{n_x n_x}(T)$$

$$B = T_{\text{int}}[R_{xx}(T) + R_{yy}(T)]$$

$$D = 2T_{\text{int}}R_{n_x n_y}(T)$$

则式(13)化为:

$$\varphi'(T, t)|_{t=T_{\text{int}}} = \text{tg}^{-1} \frac{A+C}{B+D} = \text{tg}^{-1} \frac{A(1+C/A)}{B(1+D/B)} \quad (14)$$

由文献[2]可知:

$$A = \frac{1}{4} A_m^2 T_{\text{int}} \sin(\Delta\omega_s T)$$

$$B = \frac{1}{4} A_m^2 T_{\text{int}} \cos(\Delta\omega_s T)$$

$$C = 2T_{\text{int}}R_{n_x n_x}(T) = -2T_{\text{int}}R_{n_x n_y}(T)$$

$$= \frac{1}{2} T_{\text{int}} \sigma_n^2 \sin(\Delta\omega_n T) \text{sinc}(\pi TBW)$$

$$D = 2T_{\text{int}}R_{n_x n_y}(T) = 2T_{\text{int}}R_{n_y n_y}(T)$$

$$= \frac{1}{2} T_{\text{int}} \sigma_n^2 \cos(\Delta\omega_n T) \text{sinc}(\pi TBW)$$

式中, $\Delta\omega_s = 2\pi\Delta f_s = 2\pi(f - f_0)$, $\Delta\omega_n = 2\pi\Delta f_n = 2\pi(f_T - f_0)$, T_{int} 为积分时间, σ_n 为噪声的均方根值, T 为采样周期, BW 为带宽。

显见, A 、 B 、 C 、 D 随采样周期 T 变化而变化,且 T 取不同值时, A 、 B 、 C 、 D 的相对大小也不同。

综上所述,可以采取如下方法来减小复相关测频的误差:

(1) 测出与噪声有关的 C 、 D 项,在测频时对式(14)中的分子、分母分别加以修正,即将分子的实测值减 C ,分母的实测值减 D ,再计算。显然,这种方法在 C 与 A 、 D 与 B 之比较大时效果明显。

(2) 在满足抽样定理的前提下,如果可以找到一个合适的采样周期 T ,使得 C 与 A 之比很小(或 D 与 B 之比很小),那么噪声对测频的影响将只取决于 D 项(或 C 项),即测频时只需单独对分母(或分子)进行修正。

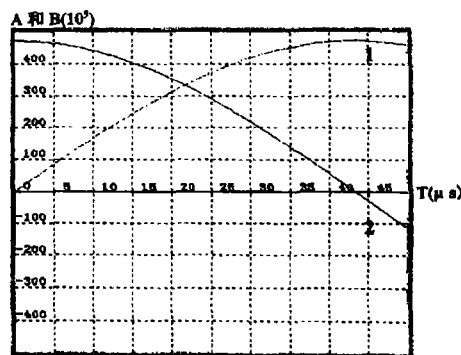
(3) 在满足抽样定理的前提下,如果可以找到

一个合适的采样周期 T ,使得 C 与 A 之比和 D 与 B 之比均很小,那么测频时就不需对分子和分母进行修正。通过计算机仿真,我们发现当采样周期 $T = 41.688\mu\text{s}$ (即采样频率为 23987Hz)时, C 与 A 之比和 D 与 B 之比都很小,下面给出仿真结果:

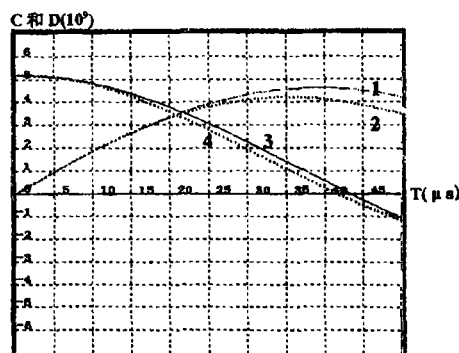
(a) 实测的 A 、 B 项和理论的 A 、 B 项比较(见图2)。

信号频率为 150kHz , A/D 转换器输入的信号幅度为 5V 。本振频率 f_0 为 144.231kHz (即 $\Delta f_s = f - f_0 = 5769\text{Hz}$)。 A/D 转换器的理论转换标度为: 5V 模拟量输入对应的数字量输出为 4096 。计算样点数为 30000 个。

(b) 实测的 C 、 D 项和理论的 C 、 D 项比较(见图3)。

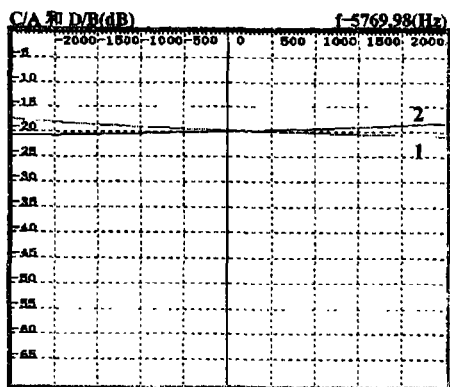


1: A 的实测和理论曲线
2: B 的实测和理论曲线
图2 A 和 B 曲线

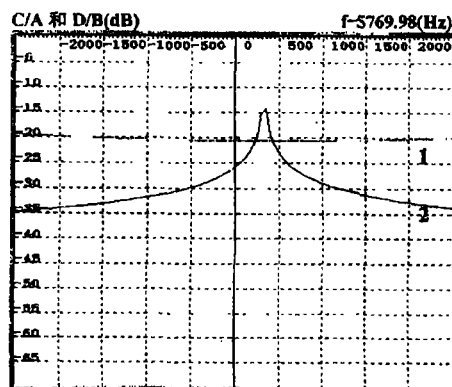


1: C 的理论曲线 2: C 的实测曲线
3: D 的理论曲线 4: D 的实测曲线
图3 C 和 D 曲线

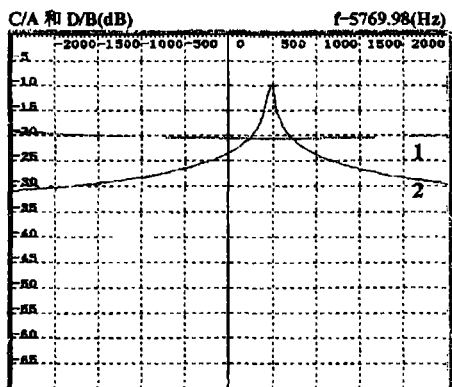
A/D 转换器输入的噪声有效值为 500mV , 即信噪比为 20dB , 带通滤波器的中心频率为 150kHz , 带宽 BW 为 6.4kHz , 低通滤波器的截止频率为 10kHz 。 A/D 转换器的理论转换标度为: 5V 模拟量输入对应的数字量输出为 4096 。计算样点数为 30000 个。图中, C 、 D 的理论曲线是根据式(15)得出的, 而实测曲线则是根据有限个实测样点经过线



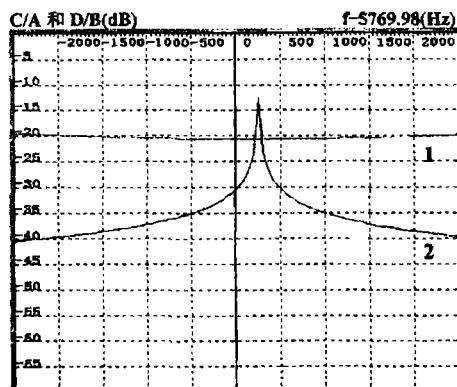
$T = 10\mu\text{s}$



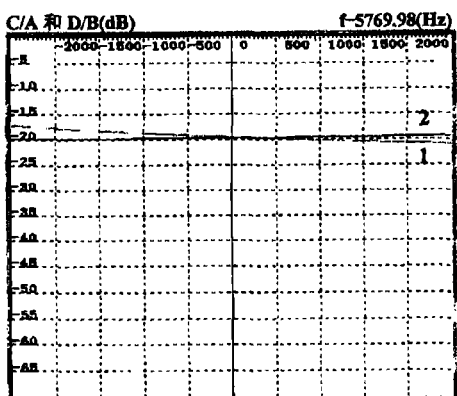
$T = 41\mu\text{s}$



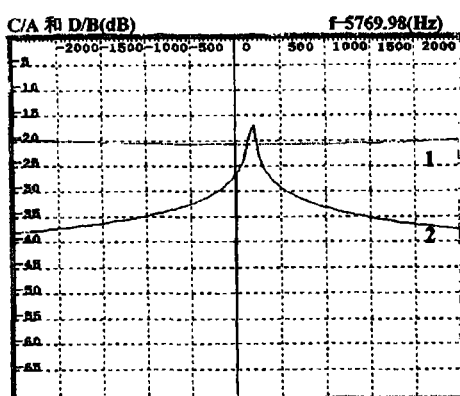
$T = 20\mu\text{s}$



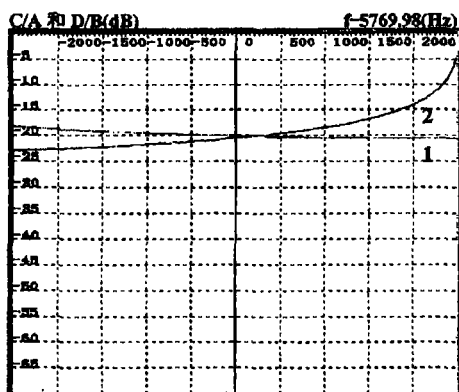
$T = 41.5\mu\text{s}$



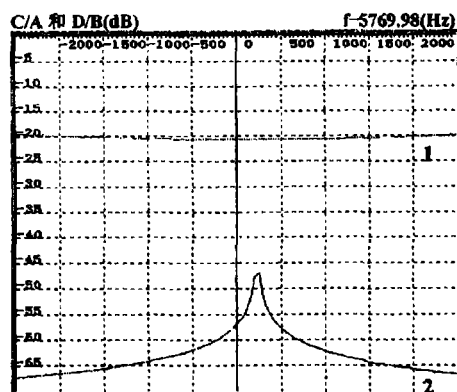
$T = 30\mu\text{s}$



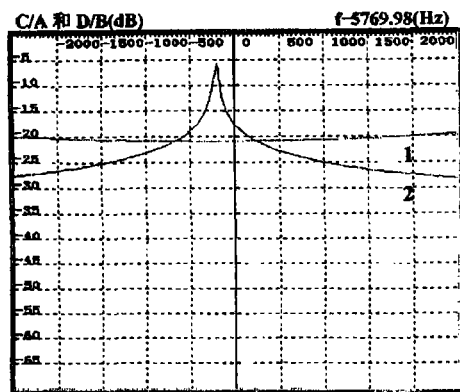
$T = 41.688\mu\text{s}$



$T = 40\mu\text{s}$



$T = 42\mu\text{s}$



T = 45 μs
1: C/A 的曲线 2: D/B 的曲线
图 4 C/A 和 D/B 的对数曲线

表 1 测频性能

$\Delta f_s - 5769$ /Hz	-1000	-900	-800	-700	-600	-500	-450
相对测频 误差/%	2.359	2.150	1.841	1.640	1.331	0.933	0.825
$\Delta f_s - 5769$ /Hz	-400	-350	-300	-250	-200	-150	-100
相对测频 误差/%	0.815	0.682	0.625	0.574	0.481	0.410	0.334
$\Delta f_s - 5769$ /Hz	-50	0	50	100	150	200	250
相对测频 误差/%	0.273	0.242	0.082	0.042	0.030	0.061	0.118
$\Delta f_s - 5769$ /Hz	300	350	400	450	500	600	700
相对测频 误差/%	0.171	0.245	0.261	0.351	0.384	0.477	0.637
$\Delta f_s - 5769$ /Hz	800	900	1000				
相对测频 误差/%	0.720	0.860	0.948				

性内插得到的。理论曲线和实测曲线存在一定差异是由于实际的带通滤波器并不是完全理想的,其频率响应不是一个矩形函数,故而其等效带宽要大于 6.4kHz,相关半径比理论值要小。

.....

(上接第 178 页)

参考文献:

- [1] 秦前清,杨宗凯. 实用小波分析[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1995. 14-17.
- [2] 黄海宁. 水下宽频带信号处理的理论与技术研究[D]. 西安:西北工业大学,1999. 69-72.
- [3] 李志舜,谢一清. 鱼雷自导系统[Z]. 西安:西北工业大学 303 教研室,1992. 81-85.
- [4] 赵松年,熊小芸. 子波变换与子波分析[M]. 北京:电子

(c) C/A 和 D/B(见图 4)。

根据 A、B 的实测值(理论值)和 C、D 的实测值,作出 C/A 和 D/B 的对数曲线 $10\log(C/A)$ 和 $10\log(D/B)$ 。当采样周期 T 取不同的值时,对应的曲线也不同。当 $T = 10\mu s, 20\mu s, 30\mu s, 40\mu s, 41\mu s, 41.5\mu s, 41.688\mu s, 42\mu s, 45\mu s$ 时, C/A 和 D/B 的对数曲线分别如图 4 所示。

4 测频结果

下面,我们给出测频实验结果(见表 1)。信号频率 $f = 150\text{kHz} \pm 1000\text{Hz}$, A/D 转换器输入的信号幅度为 5V。本征频率 f_0 为 144.231kHz(即 $\Delta f_s = f - f_0 = 5769\text{Hz} \pm 1000\text{Hz}$),信噪比为 20dB,计算样点数为 30000 个。根据计算机仿真结果,并考虑到系统实际可提供的采样频率,取采样周期 $T = 41.7\mu s$ (即采样频率为 23980Hz)。

5 结果与讨论

从表 1 的测频结果可知:当信号频率 f 在中心频率 150kHz 附近时(即 $\Delta f_s = 5769\text{Hz}$),测频误差小;而当信号频率 f 远离 150kHz 时,测频误差较大。这是由于当 D/B 很小时,测频误差主要由 C/A 来决定;从图 4 可以看出, C/A 在 $\Delta f_s = 0$ 附近时小,越向两边越大,所以造成这种现象。显然,如果系统信噪比提高或者利用 C 对复相关测频公式中的分子加以修正,将使测频误差进一步减小。

由上可知,复相关法实现方便,且精度高,具有很强的实用性。

参考文献:

- [1] Chihiro Kasai. Real-time two-dimensional blood flow imaging using an autocorrelation technique[J]. IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics 1985, SU-32(3).
- [2] A. D. 惠伦. 噪声中的信号检测[M]. 北京:科学出版社,1977.

工业出版社,1996. 14-18.

- [5] 崔锦泰[美]. 小波分析导论[M]. 西安:西安交通大学出版社,1995. 12-21.
- [6] Lora G Weiss. Wavelet and wideband correlation processing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1994, (1): 13-32.
- [7] Lora G Weiss, Randy K Young. Wideband nearfield array processing and wavelet transforms[R]. The Pennsylvania State University, Applied Research Laboratory, State College, PA 16804 USA. 1999. 521-524.