

超声被动定位的一种新滤波方法

刘宗杰 (南京林业大学, 南京 · 210037)

袁易全 (东南大学 南京 · 210018)

本文以距离几何学为基础,对超声被动定位提出了一种新的滤波方法。理论分析证明,利用这种方法,可以提高定位精度。本文还给出了数值的例子,说明如何使用这种新的滤波方法。

A new filtering method for ultrasonic passive localization

LIU Zongjie (Nanjing Forestry University, Nanjing · 210037)

YUAN Yiquan (Southeast University, Nanjing · 210018)

A new filtering method based on distance geometry for ultrasonic passive localization is presented in this paper. Theoretical analysis shows that by using this filtering method the accuracy of localization can be improved. A numerical example is also given in this paper to show how to use this new filtering method.

1 引言

超声被动定位实际上是一种关于信号参数的估计,已有文献^[1]作详细的理论分析。超声被动定位是通过测定信号从信号源传播到基阵各个基元所经历的时间(或时延)来实现的,而这些要测定的量却常被噪声所掩盖,这是被动定位中的著名难题^[2]。对信号传播时间(或时延)的测定值进行滤波筛选,提高其信噪比,无疑是提高定位精度的一种途径。

设在均匀介质中有一超声源 P (即定位目标),当信号从 P 传播到各接收器所经历的时间可以测定时,那末,在没有噪声干扰及测量误差的理想状况下,只要用 3 只接收器组成的基阵便可以定出 P 的坐标 (x, y, z) 。其步骤为:

(1) 令各接收器的坐标为 (x_i, y_i, z_i) , 介质中的声速为 v , 并将信号从 P 传播到第 i 只接收器所经历的时间记为 t_i , 那末,就可建

立起定位方程组

$$\begin{aligned} & (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 \\ & = v^2 t_i^2 \quad (i=1, 2, 3); \end{aligned}$$

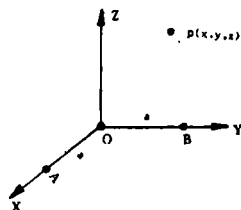


图1 说明定位误差的三角形基阵

2. 解定位方程组, 便得 (x, y, z) 。如果将 3 只接收器安置在图 1 所示的 O, A, B 3 点, 则定位方程组化为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = v^2 t_1^2 \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = v^2 t_2^2 \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = v^2 t_3^2, \end{cases}$$

解方程组, 便有

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2a} \{v^2 t_1^2 - v^2 t_2^2 + a^2\} \\ y = \frac{1}{2a} \{v^2 t_1^2 - v^2 t_3^2 + a^2\} \\ z = \pm \sqrt{v^2 t_1^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

考虑到噪声干扰及测量的随机误差,可设各 t_i 的测量值为 $t_i + \Delta t_i$ ($i=1,2,3$)。当各 $|\Delta t_i|$ 很小时, x 及 y 的误差就分别为

$$\Delta x = \frac{1}{a} (v^2 t_1 \Delta t_1 - v^2 t_2 \Delta t_2),$$

$$\Delta y = \frac{1}{a} (v^2 t_1 \Delta t_1 - v^2 t_3 \Delta t_3).$$

如果有 $\Delta t_2 = -\Delta t_1, \Delta t_3 = -\Delta t_1$, 则有

$$|\Delta x| = \frac{2v^2}{a} (t_1 + t_2) |\Delta t_1|,$$

$$|\Delta y| = \frac{2v^2}{a} (t_1 + t_3) |\Delta t_1|.$$

这两个式子说明,即使各 $|\Delta t_i|$ 很小,只要各 t_i 的值较大(即目标离基阵较远),定位结果仍可能远离 P 的真实位置。因而,仅依靠单独地提高各 t_i 的测量精度是不足以提高定位精度的,还必须将各 t_i 的测量值作为一个整体,协同地进行处理(滤波),筛选出据以定位的原始数据。

本文以距离几何学(Distance Geometry)为工具,结合由4只接收器组成的平面矩形基阵,给出一种对各 t_i 之测定值进行协同滤波的方法。采用这种方法筛选定位数据,可以提高定位的精度。

2 超声定位数据的协同滤波及定位精度分析

将4只接收器安置在图2所示的 O 、 A 、 B 、 C 四点,组成一个平面矩形基阵。其中

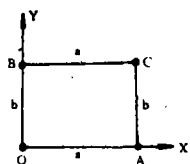


图2 平面矩形基阵

$OA=BC=a, OB=AC=b$ 。这种基阵在变压器局放定位中是很有用的^[6]。在大多数实际问题中,超声源(目标) P 不在基阵所处的平面内,这样,按附录1之定理1, $D\{O, A, B, P, C\}$ 满足(附1.3)~(附1.6),从而便有:

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & 1 \\ a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad (1),$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & a^2+b^2 & 1 \\ b^2 & a^2+b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} < 0 \quad (2),$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & v^2 t_1^2 & 1 \\ a^2 & 0 & a^2+b^2 & v^2 t_2^2 & 1 \\ b^2 & a^2+b^2 & 0 & v^2 t_3^2 & 1 \\ v^2 t_1^2 & v^2 t_2^2 & v^2 t_3^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad (3),$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & v^2 t_1^2 & a^2+b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & a^2+b^2 & v^2 t_2^2 & b^2 & 1 \\ b^2 & a^2+b^2 & 0 & v^2 t_3^2 & a^2 & 1 \\ v^2 t_1^2 & v^2 t_2^2 & v^2 t_3^2 & 0 & v^2 t_4^2 & 1 \\ a^2+b^2 & b^2 & a^2 & v^2 t_4^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4a^2b^2v^2(t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 + t_4^2) = 0 \quad (4).$$

由(4)式可知 t_1, t_2, t_3, t_4 满足

$$t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 + t_4^2 = 0 \quad (5),$$

于是如果各 t_i 的测量值 $t_i + \Delta t_i$ 使得

$$|(t_1 + \Delta t_1)^2 - (t_2 + \Delta t_2)^2 - (t_3 + \Delta t_3)^2 + (t_4 + \Delta t_4)^2|$$

较大,我们便应认为,作为整体,这组测量值包含着较大的误差,从而不能据以定位。反之,如果

$$(t_1 + \Delta t_1)^2 - (t_2 + \Delta t_2)^2 - (t_3 + \Delta t_3)^2 + (t_4 + \Delta t_4)^2 \approx 0 \quad (6),$$

我们便可认为,这组测量值所包含的误差较

小,可据以定位。这就是利用平面矩形基阵进行定位时,对测量数据进行协同滤波的准则。

现设各 t_i 的测量值 $t_i+\Delta t_i$ 能使(6)式成立,我们可证明:只要各 $|\Delta t_i|$ 很小,按这组测量数据定位,必有较理想的结果。(见附录 2)

在对 t_1, t_2, t_3, t_4 的测定值进行协同滤波之后,要求得定位结果,显然只要求出平面矩形基阵的定位方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=v^2t_1^2 \\ (x-a)^2+y^2+z^2=v^2t_2^2 \\ x^2+(y-b)^2+z^2=v^2t_3^2 \\ (x-a)^2+(y-b)^2+z^2=v^2t_4^2 \end{cases}$$

之最小二乘解就可以了。

3 数值的例子

这里,我们给出一个简单的数值例子,说明如何进行 t_1, t_2, t_3, t_4 的协同滤波。

我们在实验室的油箱内设置了一个针对板的放电源 P ,放电时 P 就是一个超声源。为实现对 P 定位,我们在油箱外壁设置 4 只超声接收器,组成图 2 所示的矩形基阵,其尺寸为 $OA=BC=17.5\text{cm}$, $OB=AC=37.5\text{cm}$ 。以 P 所发出的电信号触发各接收器,便可测得 P 所发出的超声信号传播到各基元所经历的时间 $t_i(i=1,2,3,4)$,表 1 给出了 10 次独立测试的结果。

表 1 t_1, t_2, t_3, t_4 的测试结果(单位: μs)

序 号	t_1	t_2	t_3	t_4
1	431	452	461	475
2	431	457	464	471
3	431	457	461	475
4	431	452	461	472
5	434	455	461	475
6	430	455	465	473
7	431	460	464	478
8	431	460	468	474
9	434	457	469	475
10	159	181	226	211

其中第 10 组测定值明显是野值,故予舍弃。

声学技术

由于各 t_i 都有 9 个独立测量值,可以互相搭配,从而可得到 9^4 组 (t_1, t_2, t_3, t_4) 。利用(5)式对所有这些 (t_1, t_2, t_3, t_4) 进行检验,可以发现当 $t_1=434, t_2=452, t_3=461$ 及 $t_4=478$ 时, $|t_1^2-t_2^2-t_3^2+t_4^2|$ 最小,故用这组数据进行定位计算,所得结果为: $x=-0.438\text{cm}, y=12.25\text{cm}, z=60.40\text{cm}$ 。通过实际测量,我们得到 P 的真实坐标:

$-0.5\text{cm}<x<0.0\text{cm}, 12.0\text{cm}<y<12.5\text{cm}, 60.0\text{cm}<z<60.5\text{cm}$, 计算结果与实测结果相符。

4. 讨论

在超声被动定位的许多实际问题中,我们并不能测定超声信号从超声源传播到各接收器所经历的时间,而只能测定信号抵达各接收器的时刻 T_i 。若以 T_i 作为度量时间的起点,并令 $\tau_i=T_i-T_1$,那末 τ_i 就是信号抵达第 i 只接收器的时延(相对于第 1 只接收器)。这时定位方程组就是

$$(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2=v^2(t_1+\tau_i)^2 \quad i=1,2\cdots$$

由于方程组中有 4 个未知数 x, y, z 和 t_1 , 所以至少需要 4 个方程才能求解,亦即至少要用 4 只接收器才能实现对目标的定位。若再要对各 τ_i 的测定值进行协同滤波,当然就至少需要 5 只接收器。

例如,如果我们把 5 只接收器的前 4 只排成平面矩形基阵,则按(5)式便有

$$\begin{aligned} t_1^2-(t_1+\tau_2)^2-(t_1+\tau_3)^2+(t_1+\tau_4)^2 &=0, \\ \text{解之可得 } t_1 &= \frac{1}{2} (\tau_2^2+\tau_3^2-\tau_4^2)/(\tau_4-\tau_2-\tau_3), \\ \text{从而有 } t_i &= \frac{1}{2} \frac{\tau_2^2+\tau_3^2-\tau_4^2}{\tau_4-\tau_2-\tau_3} + \tau_i \\ (i=2,3,4,5) & \quad (7). \end{aligned}$$

再对由第 2~5 只接收器及超声源构成的 5 点集使用定理 1,并注意到式(7),我们便可得到一个关于 $\tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ 的等式,从而便可建立起各 τ_i 协同滤波的准则。

附录 1 数学预备知识

设 $P_1, P_2, \dots, P_n (n \geq 4)$ 是 3 维欧氏空间中的 n 个点, P_i 与 P_j 之间的距离的 $d_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$, 我们便可按各 d_{ij} 构造一个 $n \times n$ 阶矩阵

$$D\{P_1, P_2, \dots, P_n\} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{附 1.1})$$

称为点集 $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ 的距离矩阵。显然 $D\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ 满足

$$\begin{cases} d_{ii} = 0, & (i = 1, 2, \dots, n), \\ d_{ij} = d_{ji}, & (i, j = 1, 2, \dots, n), \\ d_{ij} > 0 & (i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j), \end{cases} \quad (\text{附 1.2})$$

我们称凡是满足(附 1.2)所列 3 个条件的矩阵为一个“半度量矩阵”。这样, 3 维空间里的距离矩阵就必是半度量矩阵, 而半度量矩阵却未必是 3 维空间里的距离矩阵。那末, 一个半度量矩阵要满足什么条件才能成为 3 维空间里的距离矩阵呢? 为回答这个问题, 就必须引入半度量矩阵的“平方加边矩阵”这一概念。设

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

为半度量矩阵, 我们称

$$D_i^{(2)} = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & \dots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & \dots & d_{nn}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

为 D 的平方加边阵。下面两个定理给出了一个半度量矩阵作为 3 维空间中 n 个不共面的点之距离矩阵的必要与充分条件。

定理 1. 设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 为 3 维欧氏空间内 n 个点 ($n \geq 4$), P_1, P_2, P_3, P_4 不共面, 则其距离矩阵必满足:

$$(1) \quad |D_i^{(2)}\{P_1, P_2\}| = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{附 1.3}),$$

$$(2) \quad |D_i^{(2)}\{P_1, P_2, P_3\}| = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & d_{23}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} < 0 \quad (\text{附 1.4})$$

$$(3) \quad |D_i^{(2)}\{P_1, P_2, P_3, P_4\}| = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & \dots & d_{14}^2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{41}^2 & \dots & d_{44}^2 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{附 1.5}),$$

$$(4) \quad \text{对于一切满足 } 5 \leq u, v \leq n \text{ 之 } u, v \text{ 有}$$

$$|D_i^{(2)}\{P_1, \dots, P_u, P_v\}| = |D_i^{(2)}\{P_1, \dots, P_u, P_v\}|$$

$$= |D_i^{(2)}\{P_1, \dots, P_u, P_v, P_v\}| = 0, \text{ 即}$$

$$\begin{vmatrix} d_{11}^2 & \dots & d_{1u}^2 & d_{1v}^2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{u1}^2 & \dots & d_{uu}^2 & d_{uv}^2 & 1 \\ d_{v1}^2 & \dots & d_{vu}^2 & d_{vv}^2 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11}^2 & \dots & d_{1u}^2 & d_{1v}^2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{u1}^2 & \dots & d_{uu}^2 & d_{uv}^2 & 1 \\ d_{v1}^2 & \dots & d_{vu}^2 & d_{vv}^2 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11}^2 & \dots & d_{1u}^2 & d_{1v}^2 & d_{1v}^2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{u1}^2 & \dots & d_{uu}^2 & d_{uv}^2 & d_{uv}^2 & 1 \\ d_{v1}^2 & \dots & d_{vu}^2 & d_{vv}^2 & d_{vv}^2 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{附 1.6}).$$

定理 2. 设 D 为一个 $n \times n$ 阶半度量矩阵 ($n \geq 4$), 满足(附 1.3)~(附 1.6), 则 D 必是 3 维欧氏空间内 n 个点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的距离矩阵, 且 P_1, P_2, P_3, P_4 不共面。

事实上, 这两个定理是距离几何学中著名的 Blumenthal 嵌入定理(适用于 n 维欧氏空间)在 3 维空间里的翻版。Blumenthal 定理的证明可在文献中^[3,4]找到。不过, 这里的表述方法则参照了 Crip-

附录 2

仿照 $D\{O, A, B, P, C\}$, 我们先选一个半度量矩阵 D' :

$$D' = \begin{bmatrix} 0 & a & b & v(t_1 + \Delta t_1) & \sqrt{a^2 + b^2} \\ a & 0 & \sqrt{a^2 + b^2} & v(t_2 + \Delta t_2) & b \\ b & \sqrt{a^2 + b^2} & 0 & v(t_3 + \Delta t_3) & a \\ v(t_1 + \Delta t_1) & v(t_2 + \Delta t_2) & v(t_3 + \Delta t_3) & 0 & v(t_4 + \Delta t_4) \\ \sqrt{a^2 + b^2} & b & a & v(t_4 + \Delta t_4) & 0 \end{bmatrix}$$

注意到(1)及(2), 可知对 D' 来说必有:

$$\begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & d_{23}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} < 0,$$

注意到(3)左端的连续性, 可知对 D' 来说又有:

$$\begin{vmatrix} d_{11}^2 & \cdots & d_{1i}^2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ d_{i1}^2 & \cdots & d_{ii}^2 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 & 1 \\ a^2 & 0 & a^2 + b^2 & v^2(t_2 + \Delta t_2)^2 & 1 \\ b^2 & a^2 + b^2 & 0 & v^2(t_3 + \Delta t_3)^2 & 1 \\ v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 & v^2(t_2 + \Delta t_2)^2 & v^2(t_3 + \Delta t_3)^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0,$$

再注意到(6)式, 可知对 D' 来说还有:

$$\begin{vmatrix} d_{11}^2 & \cdots & d_{15}^2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ d_{51}^2 & \cdots & d_{55}^2 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 & a^2 + b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & a^2 + b^2 & v^2(t_2 + \Delta t_2)^2 & b^2 & 1 \\ b^2 & a^2 + b^2 & 0 & v^2(t_3 + \Delta t_3)^2 & a^2 & 1 \\ v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 & v^2(t_2 + \Delta t_2)^2 & v^2(t_3 + \Delta t_3)^2 & 0 & v^2(t_4 + \Delta t_4)^2 & 1 \\ a^2 + b^2 & b^2 & a^2 & v^2(t_4 + \Delta t_4)^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4a^2b^2v^2[(t_1 + \Delta t_1)^2 - (t_2 + \Delta t_2)^2 - (t_3 + \Delta t_3)^2 + (t_4 + \Delta t_4)^2] = 0.$$

这样, 按附录 1 定理 2 可知, D' 必是 3 维空间里一个 5 点集的距离矩阵。明显地, 我们可把这个 5 点集的前 3 个点取为 O, A, B , 把第 5 个点取为 C , 这样一来其第 4 个点 P' 就必是定位的结果。显然, P' 可有两个取法, 它们对称于矩形基阵所在的平面。我们

要证明的就是, P' 的两个可能位置中, 必有一个落在定位目标 P 的邻近。

事实上, 由于 $\{O, A, B, P, P'\}$ 是 3 维空间里的一个 5 点集, 于是按附录 1 之定理 1 便有

$$|D_5^{(2)}\{O, A, B, P, P'\}| = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & v^2t_1^2 & v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 & 1 \\ a^2 & 0 & a^2 + b^2 & v^2t_2^2 & v^2(t_2 + \Delta t_2)^2 & 1 \\ b^2 & a^2 + b^2 & 0 & v^2t_3^2 & v^2(t_3 + \Delta t_3)^2 & 1 \\ v^2t_1^2 & v^2t_2^2 & v^2t_3^2 & 0 & d^2 & 1 \\ v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 & v^2(t_2 + \Delta t_2)^2 & v^2(t_3 + \Delta t_3)^2 & d^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{附 2.1})$$

其中 d 是 P 与 P' 间的距离。将(附 2.1)中的行列式降阶得

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & 0 & v^2 t_1^2 + a^2 - v^2 t_2^2 & v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 + a^2 - v^2(t_2 + \Delta t_2)^2 \\ 0 & 2b^2 & v^2 t_1^2 + b^2 - v^2 t_3^2 & v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 + b^2 - v^2(t_3 + \Delta t_3)^2 \\ v^2 t_1^2 + a^2 - v^2 t_2^2 & v^2 t_1^2 + b^2 - v^2 t_3^2 & 2v^2 t_1^2 & v^2 t_1^2 + v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 - d^2 \\ [v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 + a^2 - v^2(t_2 + \Delta t_2)^2] & [v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 + b^2 - v^2(t_3 + \Delta t_3)^2] & [-d^2] & 2v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{附 2.2}).$$

注意到

$$(i) \quad \frac{v^2 t_1^2 + a^2 - v^2 t_2^2}{2avt_1} = \cos \alpha, \text{ 其中 } \alpha = \angle POA,$$

$$(ii) \quad \frac{v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 + a^2 - v^2(t_2 + \Delta t_2)^2}{2avt_1} = \lambda + \cos \alpha,$$

$$\text{其中, } \lambda = \frac{v}{a}(\Delta t_1 - \frac{t_2}{t_1} \Delta t_2) + \frac{v}{2at_1}(\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2),$$

$$(iii) \quad \frac{v^2 t_1^2 + b^2 - v^2 t_3^2}{2bvt_1} = \frac{b}{a} \frac{v^2 t_1^2 + b^2 - v^2 t_3^2}{2bvt_1} = \frac{b}{a} \cos \beta,$$

$$\text{其中, } \beta = \angle POB,$$

$$(IV) \quad \frac{v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 + b^2 - v^2(t_3 + \Delta t_3)^2}{2bvt_1} = \frac{b}{a} \frac{v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 + b^2 - v^2(t_3 + \Delta t_3)^2}{2bvt_1} = \frac{b}{a}(\mu + \cos \beta),$$

$$\text{其中, } \mu = \frac{v}{b}(\Delta t_1 - \frac{t_3}{t_1} \Delta t_3) + \frac{v}{2bt_1}(\Delta t_1^2 - \Delta t_3^2),$$

$$(V) \quad \frac{v^2 t_1^2 + v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 - d^2}{2avt_1} = \frac{v^2 t_1^2 + v^2(t_1 + \Delta t_1)^2 - d^2}{2vt_1 \cdot v(t_1 + \Delta t_1)} \cdot \frac{v(t_1 + \Delta t_1)}{a} \\ = \frac{v(t_1 + \Delta t_1)}{a} \cos \phi, \text{ 其中, } \phi = \angle POP',$$

把这些结果代入(附 2.2)便有

$$(2avt_1)^4 \begin{vmatrix} \frac{a}{vt_1} & 0 & \cos \alpha & \lambda + \cos \alpha \\ 0 & \frac{a}{vt_1} & \cos \beta & \mu + \cos \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta & \frac{vt_1}{a} & \frac{v(t_1 + \Delta t_1)}{a} \cos \phi \\ \lambda + \cos \alpha & \mu + \cos \beta & \frac{v(t_1 + \Delta t_1)}{a} \cos \phi & \frac{v(t_1 + \Delta t_1)^2}{a t_1} \end{vmatrix} = 0$$

这说明 $\cos \phi$ 必是方程

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{vt_1} & 0 & \cos \alpha & \lambda + \cos \alpha \\ 0 & \frac{a}{vt_1} & \cos \beta & \mu + \cos \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta & \frac{vt_1}{a} & \frac{v(t_1 + \Delta t_1)}{a} \cos \phi \\ \lambda + \cos \alpha & \mu + \cos \beta & \frac{v(t_1 + \Delta t_1)}{a} \cos \phi & \frac{v(t_1 + \Delta t_1)^2}{a t_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{附 2.3})$$

的解。这是一个关于 $\cos \phi$ 的二次方程,有两个解,它们分别对应于 P' 的两个可能位置。若以 $\phi=0$ 代入(9)之左端,有

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{a}{v_{t_1}} & 0 & \cos\alpha & \lambda + \cos\alpha \\
 0 & \frac{a}{v_{t_1}} & \cos\beta & \mu + \cos\beta \\
 \cos\alpha & \cos\beta & \frac{v_{t_1}}{a} & \frac{v(t_1 + \Delta t_1)}{a} \\
 \lambda + \cos\alpha & \mu + \cos\beta & \frac{v_{t_1}}{a} + \frac{v\Delta t_1}{a} & \frac{v_{t_1}}{a} + \frac{2v}{a}\Delta t_1 + \frac{v}{a}\frac{\Delta t_1^2}{t_1}
 \end{array}$$

$$= \frac{2\cos\alpha}{t_1}\lambda\Delta t_1 + \frac{2\cos\beta}{t_1}\mu\Delta t_1 - \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}{t_1^2}\Delta t_1^2 - \mu 2\sin^2\alpha$$

$$-\lambda^2\sin^2\beta - 2\lambda\mu\cos\alpha\cos\beta$$

(附 2.4)。

在 $\triangle POA$ 、 $\triangle POB$ 、 $\triangle POC$ 中应用三角形不等式, 可得

$$v_{t_2} < v_{t_1} + a < v_{t_1} + \sqrt{a^2 + b^2}, v_{t_3} < v_{t_1} + b < v_{t_1} + \sqrt{a^2 + b^2}, v_{t_4} < v_{t_1} + \sqrt{a^2 + b^2}, \text{于是便有}$$

$$\frac{t_i}{t_1} < 1 + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v_{t_1}}, \quad (i = 2, 3, 4),$$

由于在实际问题中总有 $v_{t_1} > \sqrt{a^2 + b^2}$, 故有

$$t_i/t_1 < 2 \quad (\text{附 2.5}).$$

注意到 λ 及 μ 之表达式及(附 2.5)式, 可知不论 t_1 有多大(即不论目标 P 离基阵有多远), (附 2.4)式右端各项都是有界量与 Δt_i 之高次项的乘积, 因而当各 $|\Delta t_i|$ 很小时, 可以忽略不计。这说明在 P' 的两个可能位置中, 必有一个使 $\phi \approx 0$, 即 $\angle POP' \approx 0$ 。若再注意到矩形基阵的对称性, 还必有 $\angle PAP' \approx 0$, $\angle PBP' \approx 0$, $\angle PCP' \approx 0$ 。这样, 我们便可断定, 当各 $|\Delta t_i|$ 很小, 目标 P 离基阵并不十分远, 定位结果 P' 就一定落在 P 之近旁。这就是所要证明的结果。

参考文献

1 郑兆宁、向大威。水声信号被动检测与参数估计理论。科学出版社, 1983, 325~490。

2 袁易全、雷家煜、姚治国, 近代声学基阵原理及其应用。南京大学出版社, 1994, 441~447。

3 L. M. Blumenthal, Theory and applications of distance geometry, 2nd ed, Chelsea, New York, 1970, 98~105。

4 T. F. Havel, T. D. Kuntz and G. M. Crippen, The theory and practice of distance geometry, Bulletin of Mathematical Biology, 1983, 45(5), 665~720。

5 G. M. Crippen, A Novel Approach to the Calculation of Conformation, Distance Geometry, J. Comp. Phys 1977, 24, 96~107。

6 刘宗杰, 袁易全, 电力变压器局部放电超声定位中的等效声速及优化算法。声学技术, 1995, 14(1), 35~40。

(上接 56 页)

参考文献

1 A. F. Seybert, B. Scenarko, F. J. Rizzo and D. J. Shippy. An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in Three-Dimensions. J. A. S. A, 1985, 77(2), 362~368。

2 冯革楠, 汪鸿振。半无限域中结构体声辐射研究第二届全国水声学术交流会 1990

3 A. J. Burton and G. F. Miller The Application of integral equation method to the solution of some exterior boundary-value problems proc. R. Ser. A 323 1970, 201~210

4 H. A. Schenck. Improved integral fomulation for acoustic radiation problems J. A. S. A, 1968, 44(1), 41~58