

复合棒弯曲振动的矩阵解法^{*}

周光平 万贤铭 张 维 (南昌航空工业学院电子系 南昌 · 330034)
晏荣明 (深圳航空公司 · 518000)

按组成材料和横截面大小的不同,把复合棒分成若干单元,每单元两端的位移、截面转角、弯矩以及剪力间的关系用矩阵表示,各单元矩阵相乘即得到复合棒总的矩阵,最后由此求解复合棒的共振条件,以及两端振速比,还给出了应用例。

关键词: 弯曲振动, 振动系统, 矩阵方法

Matrix method for analysing flexural vibration of composite bar

ZHOU Guangping WAN Xianming ZHANG Wei
(Nanchang Institute of Aeronautic Technology · 330034)
YAN Rongming (Shenzhen Airline Co. · 518000)

A composite bar is divided into several elements in terms of their materials or cross-section areas. The relation between displacement, flexural angle, moment and shear stress of the two end surfaces of each element is expressed by using a matrix. For a composite bar, the relation ship can be expressed by a general matrix, which is the multiplication of matrixes of elements. From the general matrix, the resonant frequency and velocity gain can be calculated. The application of this method is also illustrated in this paper.

Key words: flexural vibration, vibrating system, matrix method

1 引 言

求解振动问题时,传统方法是先列出运动方程求通解,然后根据具体问题的边界条件得出其共振条件及位移、应力等的解析表达式。等截面直棒的纵向、弯曲以及扭转振动问题,用以上方法均可解。然而实际工程中,还碰到一些由不同材料或不同横截面积直棒组成的复合棒。原则上传统方法可以解决复合棒的振动问题。但边界增多使问题变得复杂。为了简化,人们采用了一些近似的简单方法来求解复合棒的纵向及扭转振动问题^[1,2]。

本文用矩阵方法来求解复合棒弯曲振动,推出了 Timoshenko 理论下棒弯曲振动的矩阵系数,并给出了矩阵法对一维结构大功率弯曲振动超声换能器振动系统的应用例。

2 弯曲振动直棒两端面位移、转角、弯矩、剪力间关系的矩阵表示

棒的弯曲振动,要考虑旋转惯性和剪切变形的影响,需用 Timoshenko 理论来求解。假设一等截面直棒作弯曲振动,用 y_b 和 y_s 分别表

^{*} 江西省自然科学基金资助课题

收稿日期: 95-10-19; 修回日期: 95-12-11

示其弯曲位移和剪切位移, 根据 Timoshenko 理论, 可得以下联立方程^[3]:

$$EI \frac{\partial^3 y_b}{\partial x^3} + K A_0 G \frac{\partial y_s}{\partial x} - I \rho \frac{\partial^3 y_b}{\partial t^3} = 0 \quad (1a)$$

$$\rho A_0 \frac{\partial^2 y_b}{\partial t^2} + \rho A_0 \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} - K A_0 G \frac{\partial y_s}{\partial x} = 0 \quad (1b)$$

式中, E 是杨氏模量, G 剪切模量, ρ 密度, I 截面惯性矩, A_0 截面积, K 面积系数。分离变量, 令 $y_b = v_b e^{i\omega x}$, $y_s = v_s e^{i\omega x}$, 代入 (1a) (1b) 得:

$$EI \frac{d^3 v_b}{dx^3} + K A_0 G \frac{dv_s}{dx} + I \rho \omega^2 \frac{dv_b}{dx} = 0 \quad (2a)$$

$$\rho \omega^2 v_b + \rho \omega^2 v_s + K G \frac{dv_s}{dx} = 0 \quad (2b)$$

由 (2) 可得:

$$v_b = c_1 \operatorname{ch} n_1 x + D_1 \operatorname{sh} n_1 x + c_2 \cos n_2 x + D_2 \sin n_2 x \quad (3)$$

$$v_s = \phi [c_1 \operatorname{ch} n_1 x + D_1 \operatorname{sh} n_1 x] + \phi_2 [c_2 \cos n_2 x + D_2 \sin n_2 x] \quad (4)$$

$$\text{上式中 } \phi = -\frac{\frac{\omega^2}{c_0^2} + n_1^2}{c_s^2 c}, \quad \phi_2 = -\frac{\frac{\omega^2}{c_0^2} + n_2^2}{c_s^2 c}$$

$$n_1 = \omega M \sqrt{-1 + N \sqrt{1 + a^2 / \omega^2}},$$

$$n_2 = \omega M \sqrt{1 + N \sqrt{1 + a^2 / \omega^2}},$$

$$c = \frac{A_0 \rho}{EI}, \quad a = 2 \sqrt{-c / (\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_0^2})},$$

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{c_s^2} + \frac{1}{c_0^2}}$$

$$N = \frac{c_0^2 - c_s^2}{c_0^2 + c_s^2}, \quad c_0 = \frac{E}{\rho}, \quad c_s = \frac{K G}{\rho}.$$

用 Y, ψ, M, F 分别表示总位移、截面转角、力矩和剪力, 由 (3) (4) 可得:

$$Y = (1 + \phi) c_1 \operatorname{ch} n_1 x + (1 + \phi) D_1 \operatorname{sh} n_1 x + (1 - \phi_2) c_2 \cos n_2 x + (1 + \phi_2) D_2 \sin n_2 x \quad (5)$$

$$\psi = c_1 n_1 \operatorname{sh} n_1 x + D_1 n_1 \operatorname{ch} n_1 x - c_2 n_2 \sin n_2 x + D_2 n_2 \cos n_2 x \quad (6)$$

$$M = EI [c_1 n_1^2 \operatorname{ch} n_1 x + D_1 n_1^2 \operatorname{sh} n_1 x - c_2 n_2^2 \cos n_2 x - D_2 n_2^2 \sin n_2 x] \quad (7)$$

$$F = -K A_0 G [\phi (c_1 n_1 \operatorname{sh} n_1 x + D_1 n_1 \operatorname{ch} n_1 x) + \phi_2 (-c_2 n_2 \sin n_2 x + D_2 n_2 \cos n_2 x)] \quad (8)$$

设端面 1 和 2 处以上各参量分别为 Y_1 、

Y_2 、 ψ_1 、 ψ_2 、 M_1 、 M_2 、 F_1 、 F_2 , 由 (5) ~ (8) 式得:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= a_{11} Y_2 + a_{12} \psi_2 + a_{13} M_2 + a_{14} F_2 \\ \psi_1 &= a_{21} Y_2 + a_{22} \psi_2 + a_{23} M_2 + a_{24} F_2 \\ M_1 &= a_{31} Y_2 + a_{32} \psi_2 + a_{33} M_2 + a_{34} F_2 \\ F_1 &= a_{41} Y_2 + a_{42} \psi_2 + a_{43} M_2 + a_{44} F_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{(1 + \phi) n_2^2 \operatorname{ch} n_1 l + (1 + \phi_2) n_1^2 \cos n_2 l}{n_1^2 (1 + \phi_2) + n_2^2 (1 + \phi)} \\ a_{13} &= \frac{(1 + \phi) (1 + \phi_2) (\operatorname{ch} n_1 l - \cos n_2 l)}{EI \{ \phi_1^2 (1 + \phi_2) + n_2^2 (1 + \phi) \}} \\ a_{21} &= \frac{n_2 n_1^2 \sin n_2 l - n_1 n_2^2 \operatorname{sh} n_1 l}{n_1^2 (1 + \phi_2) + n_2^2 (1 + \phi)} \\ a_{23} &= \frac{-n_1 (1 + \phi_2) \operatorname{sh} n_1 l - n_2 (1 + \phi) \sin n_2 l}{EI \{ \phi_1^2 (1 + \phi_2) + n_2^2 (1 + \phi) \}} \\ a_{31} &= \frac{EI n_1^2 n_2^2 (\operatorname{ch} n_1 l - \cos n_2 l)}{n_1^2 (1 + \phi_2) + n_2^2 (1 + \phi)} \\ a_{33} &= \frac{n_1^2 (1 + \phi_2) \operatorname{ch} n_1 l + n_2^2 (1 + \phi) \cos n_2 l}{n_1^2 (1 + \phi_2) + n_2^2 (1 + \phi)} \\ a_{41} &= \frac{K A_0 G \{ \phi_1^2 n_1 \phi \operatorname{sh} n_1 l - n_1^2 n_2^2 \phi_2 \sin n_2 l \}}{n_1^2 (1 + \phi_2) + n_2^2 (1 + \phi)} \\ a_{43} &= \frac{K A_0 G \{ \phi_1 \phi (1 + \phi_2) \operatorname{sh} n_1 l + n_2 \phi_2 (1 + \phi) \sin n_2 l \}}{EI \{ \phi_1^2 (1 + \phi_2) + n_2^2 (1 + \phi) \}} \\ a_{12} &= \frac{n_1 \phi (1 + \phi_2) \sin n_2 l - n_2 \phi_2 (1 + \phi) \operatorname{sh} n_1 l}{n_1 n_2 (\phi_2 - \phi)} \\ a_{14} &= \frac{(1 + \phi) n_1 \sin n_2 l + (1 + \phi_2) n_2 \operatorname{sh} n_1 l}{K A_0 G n_1 n_2 (\phi_2 - \phi)} \\ a_{22} &= \frac{\phi_2 \operatorname{ch} n_1 l - \phi \cos n_2 l}{\phi_2 - \phi} \\ a_{24} &= \frac{\operatorname{ch} n_1 l - \cos n_2 l}{K A_0 G (\phi_2 - \phi)} \\ a_{32} &= \frac{-EI (\phi n_1 \operatorname{sh} n_1 l + \phi_2 n_2 \sin n_2 l)}{\phi_2 - \phi} \\ a_{34} &= \frac{-EI (n_1 \operatorname{sh} n_1 l + n_2 \sin n_2 l)}{K A_0 G (\phi_2 - \phi)} \\ a_{42} &= \frac{K A_0 G (\cos n_2 l - \operatorname{ch} n_1 l) \phi \phi_2}{\phi_2 - \phi} \\ a_{44} &= \frac{\phi_2 \cos n_2 l + \phi \operatorname{ch} n_1 l}{\phi_2 - \phi} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

它们由棒的材料性质及长度和横截面积决定,把(9)写成矩阵形式,有

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \psi_1 \\ M_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ \psi_2 \\ M_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

因此弯曲振动棒任意两截面间的位移、转角、力矩、剪力间的关系可用矩阵来表示。

3 复合棒弯曲振动的矩阵解法

对于复合棒,可以按材料和截面大小不同,把棒分成几个单元,如图 1 所示。设第 i 单元左端面的位移、截面转角、弯矩、剪力分别为 Y_i 、 ψ_i 、 M_i 、 F_i ,在右端面处为 Y_{i+1} 、 ψ_{i+1} 、 M_{i+1} 、 F_{i+1} ,根据前面分析有:

图 1 n 单元复合棒

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ \psi_i \\ M_i \\ F_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & a_{14}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & a_{23}^i & a_{24}^i \\ a_{31}^i & a_{32}^i & a_{33}^i & a_{34}^i \\ a_{41}^i & a_{42}^i & a_{43}^i & a_{44}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{i+1} \\ \psi_{i+1} \\ M_{i+1} \\ F_{i+1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

上式中,矩阵 $[a^i]$ 的系数是由第 i 单元棒的材料性质及长度和横截面大小决定的。由于单元与单元间的接触面处位移、转角、弯矩以及剪力相等。因此连续 n 次应用(12)式可得到复合棒左端面位移 Y_1 、转角 ψ_1 、弯矩 M_1 、剪力 F_1 与右端面的位移 Y_{n+1} 、转角 ψ_{n+1} 、弯矩 M_{n+1} 、剪力 F_{n+1} 之间的关系:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \psi_1 \\ M_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{n+1} \\ \psi_{n+1} \\ M_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

这时,复合棒总的矩阵 $[A]$ 是几个单元的单元矩阵的乘积,即:

$$[A] = [a^1][a^2]...[a^n] \tag{14}$$

由以上分析可知,任意复合棒两端面振动参量间关系可写成(13)式的矩阵形式。再

结合具体边界条件,可求解其共振条件、两端面振速比。如果棒两端自由,两端均满足弯矩和剪力为零的条件,即 $M_1 = M_2 = 0, F_1 = F_2 = 0$,代入(13)有:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \psi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式展开,可得

$$A_{31}Y_2 + A_{32}\psi_2 = 0; A_{41}Y_2 + A_{42}\psi_2 = 0$$

共振条件如(15)式, A_{41} 两端振速比如(16)式

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \end{vmatrix} = A_{31}A_{42} - A_{41}A_{32} = 0 \tag{15}$$

$$Y_2/Y_1 = A_{32}/(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}) \tag{16}$$

如果棒两端固定,则要求 $Y_2 = Y_1 = \psi_2 = \psi_1 = 0$,代入(13)式得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_2 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

上式展开有:

$$A_{13}M_2 + A_{14}F_2 = 0; A_{23}M_2 + A_{24}F_2 = 0$$

所以共振条件是:

$$\begin{vmatrix} A_{13} & A_{14} \\ A_{23} & A_{24} \end{vmatrix} = A_{13}A_{24} - A_{23}A_{14} = 0 \tag{17}$$

4 矩阵法应用例

图 2 是弯曲振动换能器,由中间压电陶瓷以及前后金属块组成。图 3 是弯曲振动换能器与阶梯变幅杆组成的振动系统。它们均可看作复合棒。文献[4][5]用传统方法,作一些近似处理对其进行振动分析,显得复杂。我们采用矩阵法,利用微机进行计算。图 4 是计算一定材料和尺寸,两端自由的复合棒的程序框图。计算频率从 1 到 50kHz。

对图 2、3 所示换能振动系统,取金属铝块密度 $2.7 \times 10^3 \text{kg/m}^3$,杨氏模量 $7.45 \times$

10^{10} N/m^2 , 剪切模量 $2.81 \times 10^{10}\text{ N/m}^3$, 取压电陶瓷密度 $7.5 \times 10^3\text{ kg/m}^3$, 杨氏模量 $5.55 \times 10^{10}\text{ N/m}^3$, 剪切模量 $2.21 \times 10^{10}\text{ N/m}^3$, 面积系数 K 均取 0.9。长度和直径如图所示。

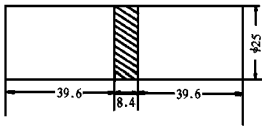


图 2 弯曲振动换能器

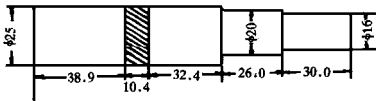


图 3 弯曲振动换能器振动系统

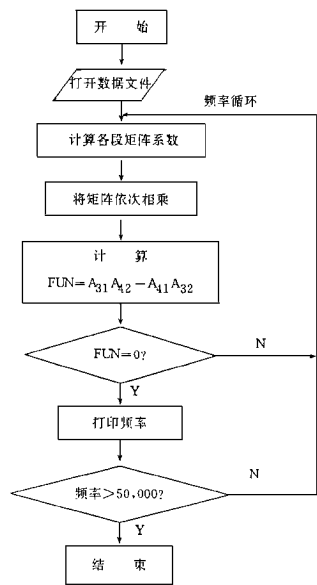


图 4 程序框图

根据矩阵方法, 利用所编程序, 算得振动系统的共振频率。如表 3 和表 4 可见计算值与测量值符合得很好。

表 1 图 2 换能器共振频率

计算值 kHz	测量值 kHz
11.2	11.0
27.1	26.8
40	39.9

表 2 图 3 振动系统共振频率

计算值 kHz	测量值 kHz
5.3	5.28
12	11.85
21.2	21.1
31.2	31.0
40	39.8

5 结 论

(1) 弯曲振动直棒端面位移、转角, 弯矩, 剪力间关系可用矩阵表示。本文推出了 *Timoshenko* 理论下的矩阵系数。

(2) 用矩阵法求解复合棒弯曲振动, 方法可行, 方便迅速。

参考文献

1 俞宏沛. 纵向振动换能器工程设计理论, 水声通讯, 1994, 3
2 贺西平、程存弟. 超声扭振系统的四端网络设计法, 应用声学, 1994; 13
3 Julius Miklowitz. Flexural wave solution of coupled equations representing the more exact theory of bending, Journal of Applied Mechanics, Dec. 1953.
4 Eiji Mori. New bolt clamped flexural mode ultrasonic high power transducer with one dimensional construction. Ultrasonic International 89 Conference Proceedings, 1989
5 Yuji Watanabe. A study on transducer- stepped type solid horn for flexural mode ultrasonic high power transducer with one dimensional construction. Ultrasonic International 91 Conference Proceedings, 1991;